su profesor particular

MATEMATICAS PARA TODOS

ENCICLOPEDIA UNIVERSAL DE MATEMATICAS

E.G.B. / B.U.P.
C.O.U. / SELECTIVIDAD
FORMACION PROFESIONAL / OPOSICIONES

MATEMATICAS PARA TODOS

VOLUMEN 3

DIRIGIDA POR: JUAN BAUTISTA GRAU OLIVE

ESPAÑA	ENSEÑANZA GENERAL BASICA (E.G.B.) FORMACION PROFESIONAL OPOSICIONES EN GENERAL
AMERICA	BACHILLERATO PRIMARIO BACHILLERATO ELEMENTAL OPOSICIONES EN GENERAL

EDICIONES RUEDA J.M. S.A.

EDITORIAL HORIZONTE

ÍNDICE DEL VOLUMEN 3

TEMA 25 ESTUDIO GENERAL DE LAS FUNCIONES **641**

1. DEFINICION DE FUNCION.
2. CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES.
3. REPRESENTACION GRAFICA CARTESIANA.
   - Introducción a la representación gráfica.
   - Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax$.
   - Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax + b$.
   - Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2$.
   - Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2 + b$.
   - Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2 + bx + c$.
   - Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^3$.
   - Estudio generalizado de una función de tipo $y = ax^m$.
4. CARACTERISTICAS GRAFICAS DE UNA FUNCION.
5. INTERSECCION DE DOS FUNCIONES. ESTUDIO ANALITICO Y GRAFICO.
6. EJERCICIOS PROPUESTOS. SOLUCIONES.

TEMA 26 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS **711**

1. DEFINICION DE LA FUNCION EXPONENCIAL.
2. GRAFICAS CARTESIANAS DE LA FUNCION EXPONENCIAL.
3. ESTUDIO Y PROPIEDADES GENERALES DE LA FUNCION EXPONENCIAL.
   - Caso $f(x) = a^x$ para $a > 1$.
   - Caso $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$.
4. PROBLEMAS.
5. DEFINICION DE LA FUNCION LOGARITMICA.
6. GRAFICA DE LA FUNCION LOGARITMICA.
7. ESTUDIO Y PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMICA.
   - Caso $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$.
   - Caso $f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$.
8. DEFINICION DE LOGARITMO: PROPIEDADES Y OPERACIONES.
9. PROBLEMAS.
10. ECUACIONES EXPONENCIALES. PROBLEMAS.
11. ECUACIONES LOGARITMICAS: PROBLEMAS.
12. PROBLEMAS DE SISTEMAS LOGARITMICOS.
13. PROBLEMAS CON SOLUCIONES.

TEMA 27 LOGARITMOS DECIMALES Y NEPERIANOS **767**

TABLAS DE LOGARITMOS.

1. CONCEPTO DE LOGARITMOS DECIMALES.
   - Cálculo de la característica.
   - Cálculo de la mantisa. Teorema de la mantisa.
2. CALCULO LOGARITMICO.
   - Problema directo.
   - Problema inverso. Antilogaritmo.
3. COLOGARITMO.
4. CONCEPTO DEL NUMERO "e"
5. LOGARITMOS NEPERIANOS.
6. PROBLEMAS. SOLUCIONES.

TEMA 28 CONCEPTOS DE TRIGONOMETRIA **795**

1. CONCEPTO DE ANGULO.
   - Sistema sexagesimal.
   - Sistema centesimal.
   - Radián.
2. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO.
3. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO SEGUN EL CUADRANTE.
4. RELACION ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO.
5. VALORES DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$.
6. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS COMPLEMENTARIOS.
7. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS SUPLEMENTARIOS.
8. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS OPUESTOS.
9. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS QUE DIFIEREN EN DOS RECTOS.
10. REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE.
11. TABLAS TRIGONOMETRICAS.
    - Problema directo.
    - Problema inverso.
12. PROBLEMAS. SOLUCIONES.

TEMA 29 AMPLIACION DE LA TRIGONOMETRIA **855**

1. RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO $(a \pm b)$
2. RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO 2α
3. RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO $\alpha/2$
4. TRANSFORMACION DE SUMAS EN PRODUCTOS.
5. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.
   - Función $y = \text{sen } x$
   - Función $y = \cos x$
   - Función $y = \text{tag } x$
6. PROBLEMAS. SOLUCIONES.

TEMA 30 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS Y OBTUSANGULOS **877**

1. DADO UN ANGULO AGUDO Y LA HIPOTENUSA.
2. DADO UN CATETO Y UN ANGULO AGUDO.
3. DADO LA HIPOTENUSA Y UN CATETO.
4. DADO LOS DOS CATETOS.
5. METODO DE LA DOBLE OBSERVACION.
6. PROBLEMAS.
7. TEOREMA DEL SENO.

8. TEOREMA DEL COSENO.
9. TEOREMA DE LA TANGENTE.
10. FORMULAS DE BRIGGS.
11. PROBLEMAS.

TEMA 31 AMPLIACION DE POLINOMIOS 915
2ª PARTE: FUNCIONES POLINOMICAS.
Potencia de polinomios.

TEMA 32 EL NUMERO COMPLEJO 945
1. INTRODUCCION.
2. DEFINICION DE NUMERO COMPLEJO (FORMA CARTESIANA).
3. IGUALDAD DE NUMEROS COMPLEJOS.
4. SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS.
5. PROPIEDADES DE LA SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS.
   Asociativa.
   Conmutativa.
   Elemento neutro.
   Elemento opuesto.
6. RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS.
7. PROPIEDADES DE LA RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS.
8. MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS.
   Asociativa.
   Conmutativa.
   Elemento neutro.
   Elemento inverso.
9. DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS.
10. UNIDAD IMAGINARIA – POTENCIAS DE "i".
11. FORMA BINOMIA DEL NUMERO COMPLEJO.
12. PARTE REAL E IMAGINARIA DE UN NUMERO COMPLEJO.
13. SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
14. RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
15. PRODUCTO DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
16. CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO. PROPIEDADES.
17. DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
18. POTENCIAS DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
19. RAIZ CUADRADA DE NUMEROS COMPLEJOS.
20. FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO.
21. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS.
22. FORMA TRIGONOMETRICA DEL NUMERO COMPLEJO.
23. OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR.
   Producto de complejos.
   Cociente de complejos.
   Potencias de complejos.
   Raices de complejos.
24. EJERCICIOS PROPUESTOS. SOLUCIONES.

TEMA 25

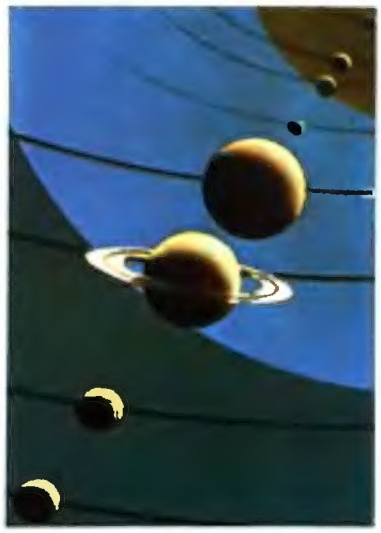
ESTUDIO GENERAL DE LAS FUNCIONES

INDICE

1.–DEFINICION DE FUNCION.
2.–CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES.
3.–REPRESENTACION GRAFICA CARTESIANA.
- 3.1. Introducción a la representación gráfica.
- 3.2. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax$.
- 3.3. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax + b$.
- 3.4. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2$.
- 3.5. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2 + b$.
- 3.6. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2 + bx + c$.
- 3.7. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^3$.
- 3.8. Estudio generalizado de una función de tipo $y = ax^m$.

4.–CARACTERISTICAS GRAFICAS DE UNA FUNCION.
5.–INTERSECCION DE DOS FUNCIONES. ESTUDIO ANALITICO Y GRAFICO.
6.–EJERCICIOS PROPUESTOS. SOLUCIONES.

TEMA 25



ACHATAMIENTO DE LOS PLANETAS

No nos creemos que el planeta Tierra es el único que está achatado. Todos los planetas que existen en el Universo tienen esta misma característica, sólo que unos más que otros, y, por supuesto, debido a su rotación, a su velocidad y gravedad. La relación que existe en este achatamiento y matemáticamente es: si llamamos x al radio del ecuador, e y, al del polo, la fórmula será:

$$\frac{x - y}{x}$$

Los datos con que contamos y además adaptados Internacionalmente:

$$\frac{1}{297}$$

ESTUDIO GENERAL DE LAS FUNCIONES

1.–DEFINICION DE FUNCION

Se llama función a una aplicación de un conjunto, al que llamaremos "A", en otro conjunto que denominaremos "B".

El conjunto "A" es el conjunto **original**, y está formado por los valores que constituyen la variable independiente "x", denominada de esta forma porque puede tomar cualquier valor.

El conjunto "B" se llama conjunto **imagen** y está formado por los valores que constituyen la variable dependiente "y", llamada de esta forma porque su valor depende del que tome "x".

$$x \xrightarrow{\ f\ } y$$

$$y = f(x)$$

Con esta anotación expresamos que la variable "x" se transforma en la variable "y", o lo que es lo mismo, que "y" es la imagen de "x", al aplicarle una determinada función f.

Ej.: Dada una función $f(x) = y = 3x + 5$ donde x, por ejemplo, toma los valores (1, 2, 3, . . .), valores que van a constituir el conjunto original, ¿cómo se obtendrá el conjunto imagen correspondiente?

$$y = f(x) = 3x + 5$$

Para $x = 1 \rightarrow y = f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8$

Para $x = 2 \rightarrow y = f(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 11$

Para $x = 3 \rightarrow y = f(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$

Para $x = 0 \rightarrow y = f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$

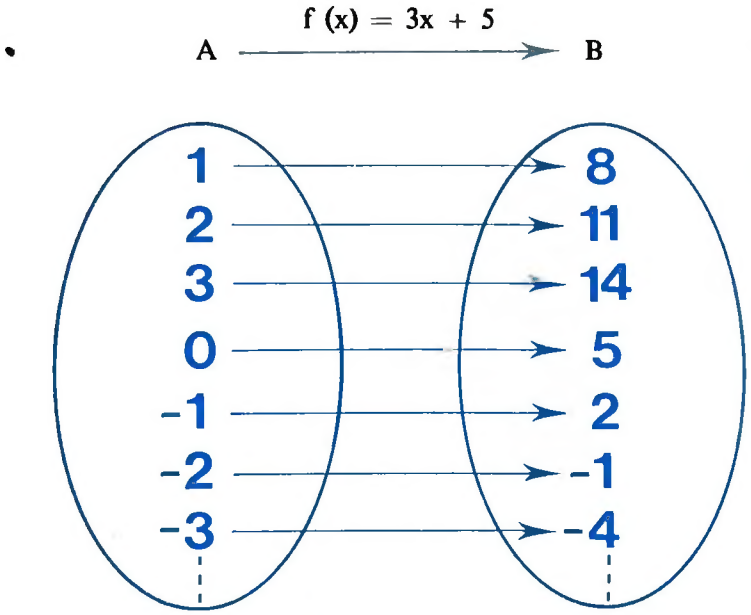
Para $x = -1 \rightarrow y = f(-1) = 3(-1) + 5 = 2$

Para $x = -2 \rightarrow y = f(-2) = 3(-2) + 5 = -1$

Para $x = -3 \rightarrow y = f(-3) = 3(-3) + 5 = -4$

.....

NOTA.—Como ya se estudió en temas anteriores, las aplicaciones se pueden representar mediante un diagrama de flechas. Según este diagrama el ejemplo anterior quedaría de la siguiente forma:



Ej.: Sea en este caso $f(x) = y = 3x^2$ demos a "x" los valores {0, −1, +2, −3, . . .}. ¿Cuál será en este caso, teniendo en cuenta los valores dados a x, el conjunto imagen?

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS".

Esta obra forma **UN TODO** perfectamente estructurado de las Matemáticas, partiendo de cero hasta dejar al alumno debidamente preparado, sentado en el aula universitaria.

BERNABE TIERNO

LA ORQUESTA

En el siglo XVII, debido a las necesidades de intermedios en las óperas, entre las distintas piezas cantadas, es cuando los pequeños conjuntos instrumentales adquieren mayor importancia, ya que hasta entonces dependían de los deseos de los grandes señores y aumentaban o disminuían de número según los caprichos de éstos.

Monteverdi, creador de la música de ópera, realiza un gran cambio al armonizar y conjuntar los sonidos instrumentales enlazándolos.

Aparecen los "suites" para los violines o para órgano, clave y violín. Se va perfeccionando posteriormente la orquesta; los violines, violas, violonchelo y contrabajo, de la familia de la cuerda; la flauta y cornetas, parecidas a la trompeta. Va creciendo la perfección de los instrumentos, el timbre y sonoridad con la potancia y los sonidos más difíciles.

Ya en pleno siglo XVIII la orquesta estará compuesta con las clases de instrumentos que se diferencian poco de los de ahora y, por vez primera, una orquesta tocó sentada ante el público sobre 1760.

$$y = f(x) = 3x^2$$

Para $x = 0 \rightarrow y = f(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$

Para $x = -1 \rightarrow y = f(-1) = 3\,(-1)^2 = 3$

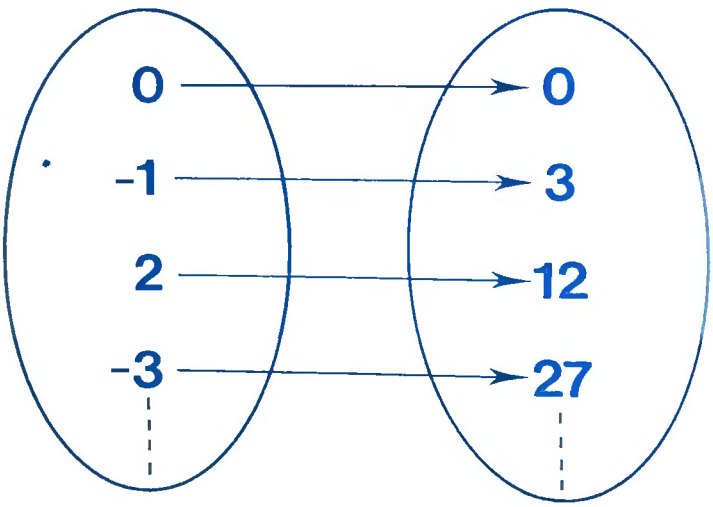
Para $x = 2 \rightarrow y = f(2) = 3\,(2)^2 = 12$

Para $x = -3 \rightarrow y = f(-3) = 3\,(-3)^2 = 27$

.....

Mediante el diagrama de flechas tendríamos:

$$A \xrightarrow{f(x) = 3x^2} B$$



Ej.: Dada la función $\boxed{f(x) = \frac{x+1}{2}}$, calcular $f(3)$, $f(-1)$, $f(0)$.

$$y = f(x) = \frac{x+1}{2}$$

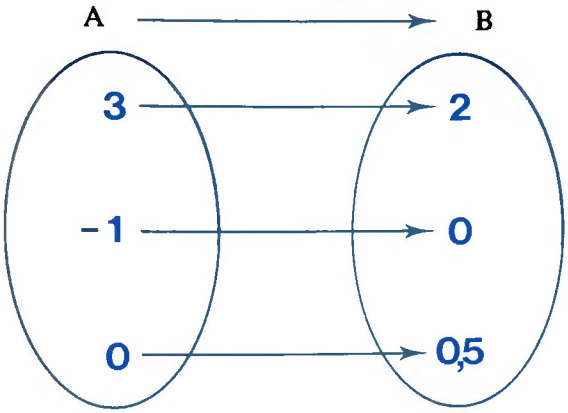
Para $x = 3 \rightarrow y = f(3) = \frac{3+1}{2} = 2$

Para $x = -1 \rightarrow y = f(-1) = \frac{-1+1}{2} = 0$

Para $x = 0 \rightarrow y = f(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Mediante el diagrama de flechas tendremos:

$$f(x) = \frac{x + 1}{2}$$



Los ejemplos vistos anteriormente son puramente matemáticos; sin embargo, hay ejemplos prácticos en la vida diaria que constituyen funciones típicas.

Ej.: El coste "C" de un determinado peso "P" de chocolate será proporcional a este peso "P"; suponiendo que el kilo esté a 100 pesetas, la función será la siguiente:

$$C = 100\ P$$

Donde "P" será la variable independiente y "C" la variable dependiente, ya que el coste total del chocolate dependerá del peso que éste tenga.

¿Cuál sería el coste de 5 kilos de chocolate, de 10 y de 2?

$$C = 100\ P$$

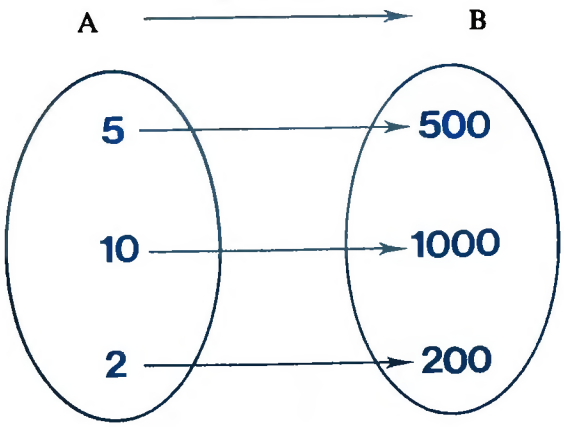
Para $P = 5 \rightarrow C = 100 \times 5 = 500$ ptas.

Para $P = 10 \rightarrow C = 100 \times 10 = 1.000$ ptas.

Para $P = 2 \rightarrow C = 100 \times 2 = 200$ ptas.

Según el diagrama de flechas, sería:

$$C = 100\ P$$



A mediados del siglo XVIII se creó en Europa una de las más importantes orquestas. Estaba compuesta por veinte violines, cuatro violas, cuatro violonchelos, cuatro contrabajos, dos oboes, dos flautas, dos clarinetes, cuatro fagotes, dos trompas, trompetas y timbales.

Sigue la orquesta igual en esencia, aunque se añaden instrumentos como la tuba, el arpa y el corno inglés; sus sonidos se van perfeccionando al concordar, entrelazarse y fundirse los sonidos de los instrumentos orquestales.

Estos son ya en el siglo XX los siguientes: de 15 a 20 violines primeros, 11 ó 16 violines segundos, 6 ó 10 violas, 6 ó 10 violonchelos, 4 u 8 contrabajos, 1 flautín, 3 ó 4 oboes, un corno inglés, 2 ó 4 clarinetes, un clarinete bajo, 2 ó 4 fagotes, un contrafagot, de 2 a 5 trompas, 2 a 5 trompetas, 2 a 4 trombones, una tuba y los timbales, el bombo y los platillos, existiendo a veces una o dos arpas, un piano, el triángulo, la caja, las campanas y el xilófono.

La colocación de los instrumentos en la orquesta suele ser la siguiente: delante el director, que es quien toca ese magnífico instrumento que es LA ORQUESTA; a derecha e izquierda del director y delante va la cuerda, el viento en el centro, delante la madera, en segundo término el metal, y la percusión al fondo.

No se conoce con certeze en qué consistíe la elimenteción de los primeros hombres de la Península Ibérica, eunque se cree que en las tribus mesetaries se basaba en una pests de bellotas, trigo cocido, y todo esto machacado; bebían cerveza, que hacían con cereales, y en los banquetes el vino y el hidromiel, que lo hacían con frutas y hierbas.

A los distintos invasores de nuestra patria debemos le introducción en le cocina de distintos elementos: así el ajo y el aceite lo trajeron los romanos; la caña de azúcar, el azafrán y diverses frutas, los árabes.

El descubrimiento de América hizo posible el conocimiento de la patata, el cacao, el tomate, etc. También las Cruzadas fueron un motivo para conocer alimentos exóticos y adaptarlos a nuestro suelo.

En la antigüedad los banquetes se distinguían más por la centidad de platos que por su calidad, sobre todo en el Medioevo, donde los reyes se hacían servir clentos de pletos diferentes.

Continúa en la página siguiente.

No todos los problemas se plantean siempre de la misma forma. En los ejemplos vistos anteriormente se daba la variable independiente "x" y se pedía hallar su imagen "y". No obstante también se pueden presentar casos en los que nos den la imagen y nos pidan encontrar su correspondiente variable independiente u origen.

Ej.: ¿Qué número tiene por imagen al número 14 en la función $f(x) = 2x$?

$$f(x) = 2x$$

Sustituyendo, tenemos:

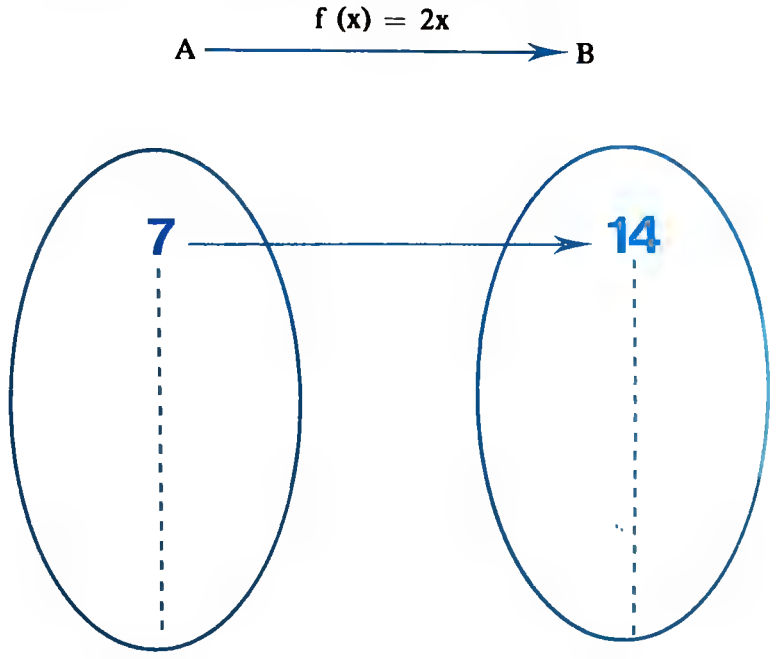
$$14 = 2x$$

Despejando:

$$x = \frac{14}{2} = 7$$

Por tanto, 7 es la variable independiente que tiene por imagen al número 14 en la función $f(x) = 2x$.

Mediante el diagrama de flechas tendremos:



Ej.: ¿Cuál sería el número que tiene por imagen al número 10, en la función:

$$f(x) = \frac{12x}{2x - 8} \quad ?$$

Sustituyendo tenemos:

$$10 = \frac{12x}{2x - 8}$$

Eliminando denominadores:

$$10\ (2x - 8) = 12x$$

Quitando paréntesis:

$$20x - 80 = 12x$$

Despejando:

$$20x - 12x = 80$$

$$8x = 80$$

$$x = \frac{80}{8}$$

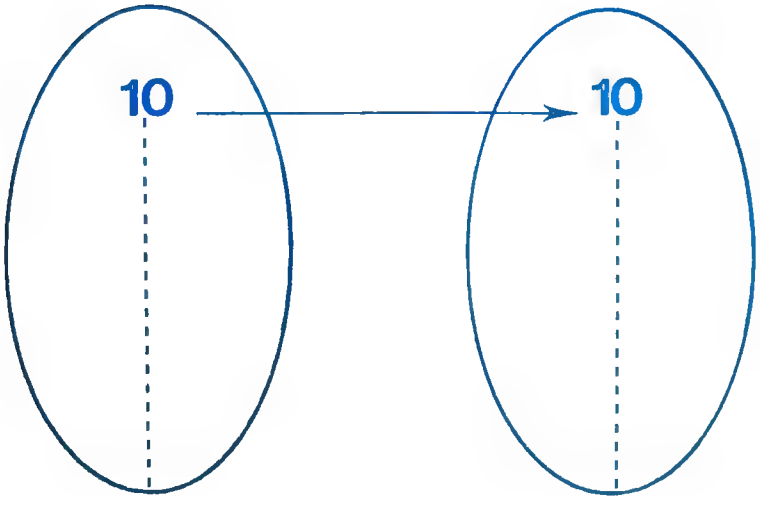
$$\boxed{x = 10}$$

Como vemos, al número 10 es al que corresponde una imagen 10; imagen y origen coinciden en este caso.

Según el diagrama de flechas tendremos:

$$f(x) = \frac{12x}{2x - 8}$$

A ⟶ B

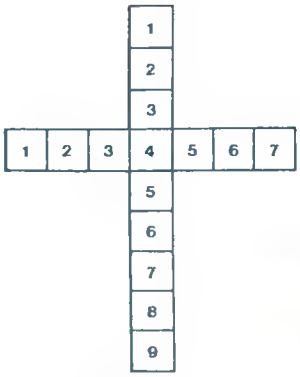


Los primeros utensilios que se usaron para comer fueron los dedos, y eso sí, distintas formas de cuchillos, según para lo que fuesen. El tenedor no se introdujo en la mesa hasta el siglo XV y la cuchara estaba sustituida por una taza de pequeño tamaño.

Posteriormente los distintos reyes españoles fueron haciendo más frugal su comida (a excepción de Carlos V que era conocido por su glotonería). Esto, unido a la distinta distribución de los productos por nuestra geografía, hace que se encuentren pocos libros antiguos de gastronomía, a diferencia de los franceses, que siempre dejaron constancia escrita de los trabajos y descubrimientos de sus mejores cocineros.

La esposa de un embajador partía hacia Turquía, nuevo destino de su marido. Después de nueve años en esta nación, al regresar a París llamó al joyero indicándole que ya podía realizar la compostura de la joya en oro blanco y brillentes que le había dejado antes de partir (hacía nueve largos años). A la pregunta del joyero de que ya se había olvidado de cómo era la misma (pregunta caprichosa, claro), ella dijo que no, que recordaba que era una cruz, y que tenía nueve brillantes desde una de las extremidades hasta la parte de abajo.

El joyero, claro, sabía perfectamente cómo era la cruz, ya que la tenía en su misma mano y quería robar parte de ella sin que la señora del embajador se enterara. La cruz era así:



¿Cómo realizó la fechoría?

La solución en Pág. 672.

2.–CLASIFICACION DE FUNCIONES

A continuación indicaremos las clases de funciones que más se suelen emplear en matemáticas.

a) **Funciones empíricas:** son aquellas funciones cuya dependencia con respecto a la variable independiente "x" no puede expresarse de forma matemática y cuyas gráficas se hallan sólo por medios experimentales.

Ej.: La temperatura de enfermo en relación con las horas del día.

b) **Funciones analíticas:** son aquellas funciones cuya dependencia con respecto a la variable independiente "x" puede expresarse de forma matemática. A su vez, la función analítica se puede dividir en: funciones trascendentes y funciones algebraicas.

b.1.–*Funciones trascendentes:* son aquéllas donde la variable dependiente viene dada en función de un logaritmo, una exponencial o una razón trigonométrica, funciones que veremos en temas posteriores.

Ejemplo: $y = \log x^2$, $y = 5^x$, ...

b.2.–*Funciones algebraicas:* son aquellas en las que la variable dependiente se calcula sólo mediante operaciones de tipo algebraico: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplo: $$y = \frac{5x^2 - \sqrt{3x}}{3 - 5x}$$

A su vez las funciones algebraicas se dividen en racionales irracionales.

b.2.1.–Funciones irracionales: cuando la variable está afectada por un radical (raíz).

Ejemplo: $y = \sqrt{3x}$, $y = 3x + \sqrt{x} + 2$

b.2.2.–Funciones racionales: son aquellas en las que la variable no está afectada por radicales.

Ejemplo: $y = 3x$, $y = 5x^2 + 7x + 1$

Estas a su vez se dividen en fraccionarias y enteras o polinómicas.

b.2.2.1.–Funciones fraccionarias: cuando la función viene en forma de fracción:

Ejemplo: $$y = \frac{5x - 2}{3x + 1}, \quad y = \frac{4x^2 + 3x + 1}{x^3 - 7}$$

b.2.2.2.–Funciones enteras y polinómicas: que pueden ser de:

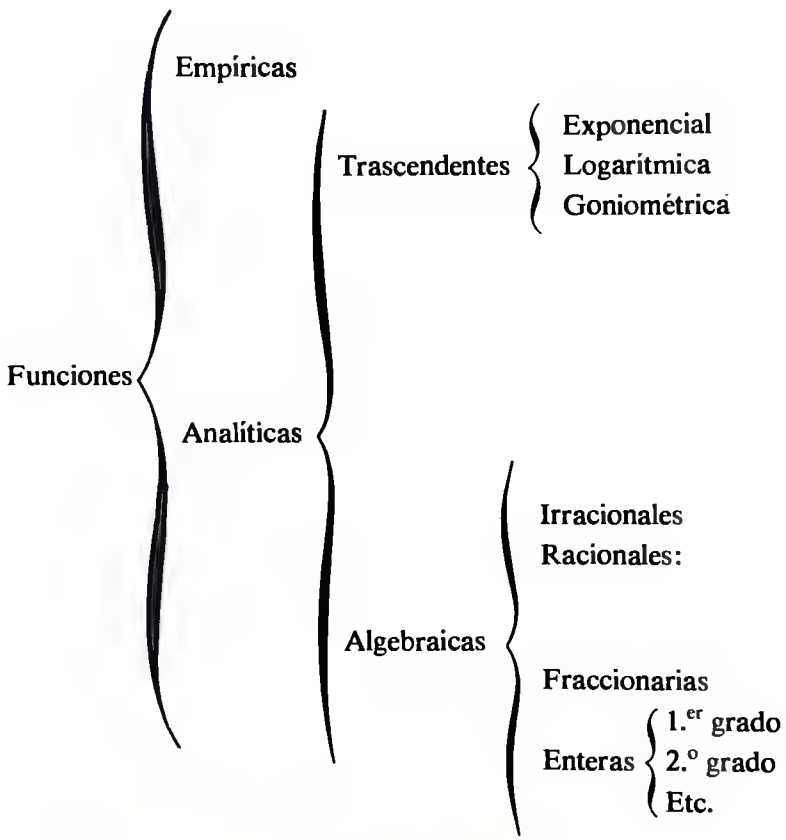
primer grado → $5x + 1 = y$

segundo grado → $y = 5x^2$

tercer grado → $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$

etcétera.

Todo lo dicho anteriormente se puede resumir en el siguiente cuadro:



c) Funciones implícitas y explícitas: en las funciones de tipo explícito la variable dependiente "y" aparece sola en una parte de la igualdad.

Ejemplo: $y = x + 5$

Ejemplo: $y = \frac{2x + 5}{3}$

mientras que en las funciones implícitas las variables "x" e "y" aparecen mezcladas y hay que despejar.

Ejemplo: $5x + y + 3 = 0$

LA INTELIGENCIA

1.–CONCEPTO

Tú, estimado joven, que a tus 15, 16, 17 años, según afirman casi todos los expertos en la mente humana, posees unas facultades intelectuales en plena potencia, seguramente estarás interesado en saber un poco más sobre el concepto de inteligencia.

Sobre la inteligencia se han dado múltiples definiciones y no es posible dar una definición generalmente aceptada.

Por ello, creo más acertado exponer los diferentes sentidos en que generalmente se usa la palabra inteligencia.

Hay quien considera la inteligencia como "la aptitud general para resolver problemas y ver las relaciones posibles de las cosas entre sí". Para E. Claparede y W. Stern, inteligencia es "la facultad de adaptarse convenientemente a situaciones nuevas".

Los psicometristas piensan que inteligencia es lo mismo que "grado de rendimiento de los mecanismos mentales". Es lo mismo nivel de inteligencia, o C.I. (cociente intelectual), obtenido mediante unos tests mentales.

Tanto estas definiciones como otras muchas no han sido capaces de informar adecuadamente sobre la naturaleza misma de la inteligencia. Quizá una de las formas más aceptables de definir la inteligencia sea considerada como el factor común de las diferentes y variadas operaciones mentales. Por eso sería más apropiado hablar de conducta o conductas inteligentes en grados diferentes.

GALAXIA

Observando detenidamente el firmamento en noches claras y sin la presencia de la Luna, veremos en el cielo una encha franja de puntitos color blanco. Esto es la Vía Láctea, que llamaron los antiguos Camino de Santiego, aquí en España, ya que los peregrinos se lo pusieron el ir a esta ciudad, e incluso decían que además de iluminarles el camino les indicabe la dirección a seguir. Hoy día se le llama "GALAXIA" (viene del griego "galaxias", lácteo).

Nuestra galexia está formada por millones de estrellas o soles que nos dan la sensación de estar tocándose entre sí.

Unas nubes blanquecinas que parecen unidas son en realidad millones de estrellas.

Tiene nuestra gslaxia forma de lente convexa, con un diámetro de más de cien mil años luz, siendo el espesor del núcleo central de unos doce mil años luz. La concentración máxima de estrellas está en el centro y conforme se va separendo hacia el exterior esta concentración esteler va disminuyendo.

Nuestro sistema soler está situado en uno de los laterales de la galaxia y desplazado hecia el norte del sistema galáctico.

El sisteme soler posee un grupo particular de estrellas cuyo diámetro tiene unos diez mll años luz. La distancie del Sol al centro del sistema galáctico es de unos doscientos años luz.

La velocidad del Sol y, por supuesto, de todo nuestro sistema solar y respecto a la galaxia, es de 19,5 kilómetros por segundo; por lo tento, en un año recorremos seiscientos millones de kilómetros.

d) **Función directa e inversa.** Dada una función $y = f(x)$, se denomina función inversa, de ella, a la función $y = f^{-1}(x)$; esta función inversa se obtiene despejando en la función que nos dan (función directa) la "x"; una vez despejada la "x", se cambia esta variable por la variable "y" y la variable "y" se cambia por la variable "x".

Aunque en teoría esto parece difícil de entender, en la práctica se reduce a algo muy sencillo de obtener. Veamos varios ejemplos.

Ej.: $f(x) = x + 4$. Hallar la función inversa. La función dada, que es la función directa, se puede poner como:

$$y = x + 4$$

Despejando "x" tendremos:

$$x = y - 4$$

Sustituyendo "x" por "y" y viceversa, queda:

$$y = x - 4$$

En definitiva, la función inversa de la dada será:

$$f^{-1}(x) = x - 4$$

Realizando el estudio, del ejemplo anterior, en base al diagrama de flechas y dando a "x" los valores $\{1, 2, 0, -2\}$, obtendremos en la función directa los siguientes valores de y:

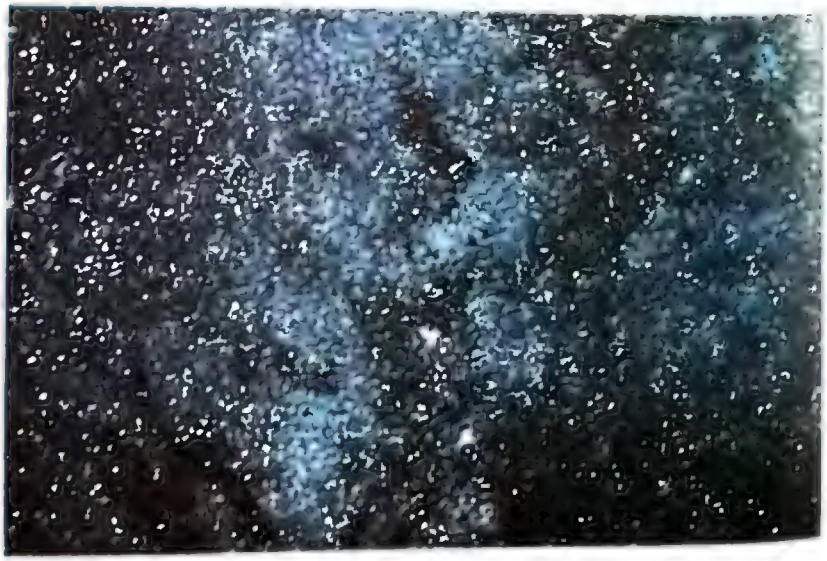
$$f(x) = x + 4$$

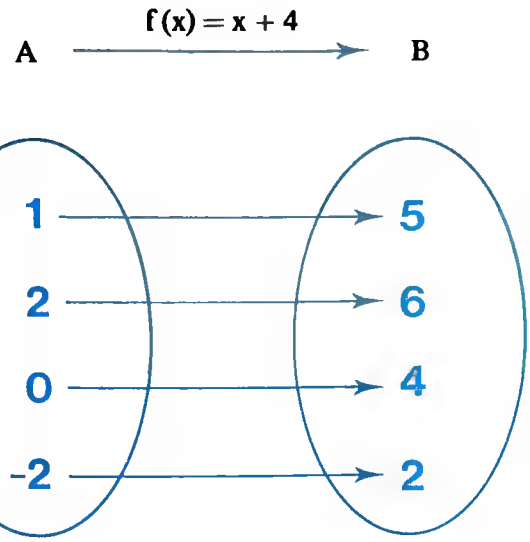
Para $x = 1 \rightarrow f(1) = 1 + 4 = 5$

Para $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 + 4 = 6$

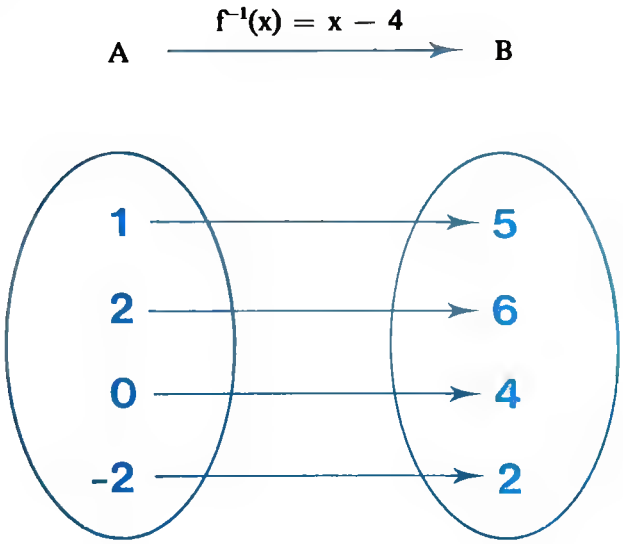
Para $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 + 4 = 4$

Para $x = -2 \rightarrow f(-2) = -2 + 4 = 2$





La función inversa $f^{-1}(x) = x - 4$ se representará de la siguiente forma:



Analíticamente se comprueba que esto es así, si en la función inversa damos a "x" los valores de "y" que nos han salido en la función directa {5, 6, 4, 2}.

$$f^{-1}(x) = x - 4$$

Para $x = 5 \rightarrow f^{-1}(5) = 5 - 4 = 1$

Para $x = 6 \rightarrow f^{-1}(6) = 6 - 4 = 2$

Para $x = 4 \rightarrow f^{-1}(4) = 4 - 4 = 0$

Para $x = 2 \rightarrow f^{-1}(2) = 2 - 4 = -2$

HISTORIA DE LA MATEMATICA

Varios han sido los pueblos que nos han legado sus estudios y descubrimientos matemáticos. Con sus razonamientos deductivos el uso de los números y las relaciones que se guardan entre sí, la Geometría y los métodos de manejar lss figures, llegamos al estado actual de esta ciencia.

Vamos a tratar (al menos lo intentaremos) de tener una visión generalizade de lo que descubrieron estos pueblos, su cultura y su ciencis.

Estudiaremos en los próximos fascículos toda esta herencia. Por su dificulted, solamente vamos a poner una civilización en cada uno de los fascículos.

En primer lugar, para la mejor comprensión tento del profesor como del alumno, y recomendado especialmente a profesores y educadores, que tengan a bien comentar con el alumnado el estudio de estas civilizaciones, e incluso, pueden ampliar las explicaciones que, o bien se nos hubieran olvidado, o ignorásemos.

Por último, y como quiera que el estudio de estes civilizaciones es bastante complejo, no podemos hacer dicho estudlo en un solo fescículo.

Estudiaremos las Metemáticas en la India, Arabie, Bizancio, prehelénicas y helénicas, chinas y precolombinas y no necesariamente por este orden; las asirias, babilónicas y egipcias fueron ya estudiadas.

Los persas, en tiempos remotos, ya cultivaron las rosas; se sabe que incluso sirvieron como emblema religioso a los persas y a los midos. El cultivo de la rosa llegó a Grecia, y después a Roma por Armenia, Tracis y Macedonia.

Cuando cayó el imperio romano se cultivaban profusamente en Roma y también en Egipto. Después del desastre de Roma se continuaron cultivando en toda la zona asiática.

Los árabes, que invadieron el norte de Africa y España, las plsntaron en lugar de honor en sus bellos jardines palaciegos.

En Grecia, la ross era símbolo de Afrodita —diosa de la fertilidad, el amor y la belleza—; en Roma, símbolo de Venus; la Cristiandad dedicó esta flor a la Virgen Marís.

A principios del siglo XIX el desarrollo de las rosas cultivadas se puso de moda; la emperatriz Josefina estableció en su palacio un jardln, con una extensa colección donde se reunían todas las vsriedades y especies hasta entonces conocidas.

Por este tiempo la creación de nuevas variedades de rosas sucedía principalmente por accidente. Los cruces se daban esponténeamente en le mayoría de las colecclones; todavía no se practlcaba el cruce por polinización artificial mediante la cuidadosa selección de progenitores.

Continúa en la página siguiente.

Ej.: Calcular la función inversa de la función:

$$f(x) = y = \frac{4x + 2}{x + 1}$$

Quitamos denominadores:

$$y\,(x + 1) = 4x + 2$$

Eliminamos paréntesis:

$$yx + y = 4x + 2$$

Agrupamos las "x" en un miembro y las "y" en el otro:

$$yx - 4x = 2 - y$$

Sacamos "x" factor común:

$$x\,(y - 4) = 2 - y$$

Despejamos "x":

$$x = \frac{2 - y}{y - 4}$$

Sustituimos "x" por "y" y viceversa para obtener la función inversa:

$$f^{-1}(x) = y = \frac{2 - x}{x - 4}$$

Comprobación: Damos a la variable independiente x los valores $\{1, 0, -2\}$ y posteriormente sustituimos los valores que obtengamos de "y" en la función directa, en la "x" de la función inversa.

$$f(x) = \frac{4x + 2}{x + 1} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2 - x}{x - 4}$$

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1 + 2}{1 + 1} = \frac{6}{2} = 3 \longrightarrow f^{-1}(3) = \frac{2 - 3}{3 - 4} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0 + 2}{0 + 1} = \frac{2}{1} = 2 \longrightarrow f^{-1}(2) = \frac{2 - 2}{2 - 4} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$f(-2) = \frac{4\,(-2) + 2}{-2 + 1} = \frac{-6}{-1} = 6 \longrightarrow f^{-1}(6) = \frac{2 - 6}{6 - 4} = \frac{-4}{2} = -2$$

Mediante el diagrama de flechas tendremos:

DIRECTA

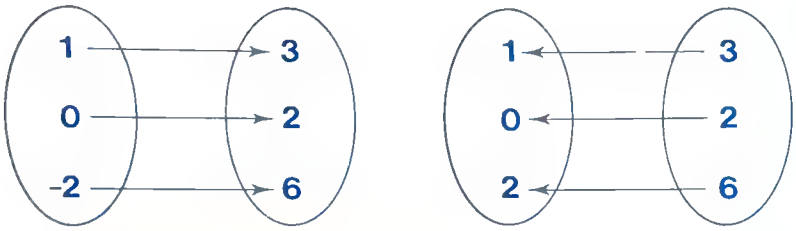
$$f(x) = \frac{4x + 2}{x + 1}$$

A ⟶ B

INVERSA

$$f^{-1}(x) = \frac{2 - x}{x - 4}$$

A ⟵ B



e) **Funciones pares e impares:** una función se puede denominar par cuando cumple la siguiente igualdad:

$$f(-x) = f(x)$$

Ej.: Dada la función $y = x^2$ comprobar si la función es par.

Damos a x un valor cualquiera, por ejemplo 6, tendríamos:

Para $x = 6 \rightarrow f(6) = 6^2 = 36$

Para $-x = -6 \rightarrow f(-6) = (-6)^2 = 36$

La función es par.

La función se denomina impar cuando la igualdad que cumple es la siguiente:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ej.: Dada la función $6x^3 = y$, ver si es par o impar.

Damos a x cualquier valor, por ejemplo 3, tendremos que:

$$x = 3 \quad ; \quad -x = -3$$

$$f(-x) = f(-3) = 6 \cdot (-3)^3 = 6(-27) = -162$$

$$-f(x) = -f(3) = -[6 \cdot (3)^3] = -[6 \cdot 27] = -162$$

La función dada $y = 6x^3$ es, por tanto, una función impar.

En los climas europeos maduraron semillas y plantas que nunca pudieron crecer en Oriente.

De hecho, las nuevas variedades de rosas fueron divididas en dos grandes grupos: rosas silvestres o especies y rosas de jardín o cultivadas; estas últimas desarrolladas por jardineros enamorados de su trabajo. Las rosas actuales descienden de una docena de rosas primitivas.

Existe un profundo desacuerdo entre los botánicos a la hora de clasificar las especies; se conocen unas 200 que se pueden considerar diferentes.

Repetidos cruces de formas originales se han deformado tanto que a menudo es imposible juzgar su origen y agruparlas sobre estas bases.

El cultivo de nuevas rosas se hizo manía, especialmente cuando se crearon empresas especializadas que ofrecían docenas de novedades anuales. Esta superproducción produjo una baja en la calidad.

Hoy día las rosas son las más populares de todas las flores, influyendo en ello la relativa sencillez de su propagación y cultivo.

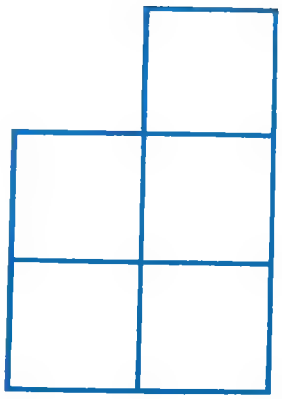
A todos estos juegos de números que ponemos en laterales les llamamos (entre otras definiciones), juegos de café.

Vamos a poner aquí varios de estos juegos, pero para hacerlos **en el café.**

Allí tenemos la materia prima para realizar estos juegos, **los palillos.**

Ahí va el primero:

Con quince palillos hacemos la figura que viene a continuación:



Hemos formado cinco cuadriláteros.

Bien, ahora con solamente quitar **tres palillos,** quedan **tres cuadriláteros.**

Bien fácil.

La solución an Pág. 672

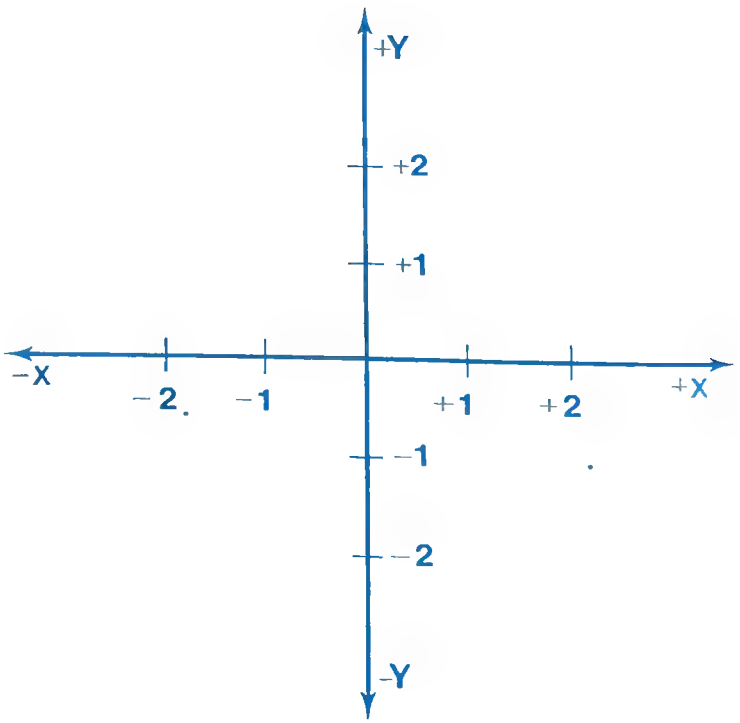
3.–REPRESENTACION GRAFICA CARTESIANA

3.1. Introducción a la representación gráfica

Toda función, por el hecho de serlo, puede representarse por distintos métodos, como pueden ser: el diagrama de flechas, los grafos, etc.

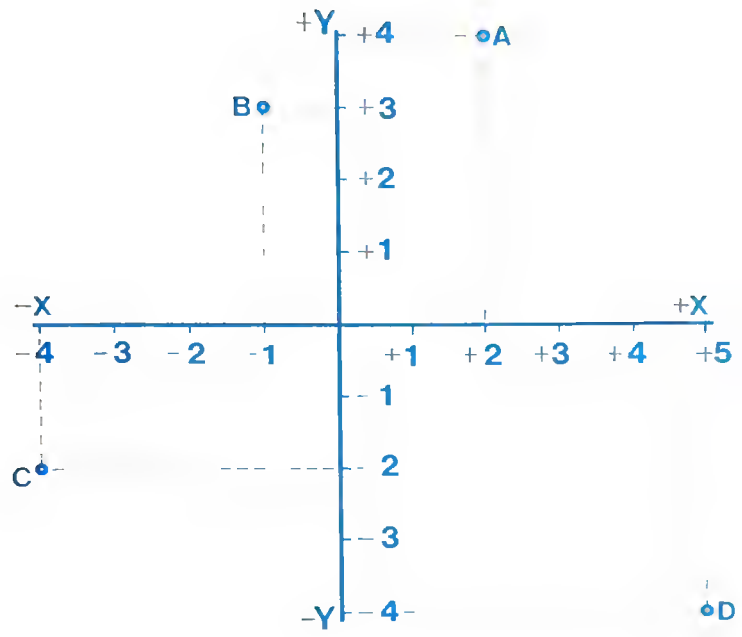
Sin embargo la representación más usada es la de el Diagrama de Coordenadas Cartesianas Rectangulares. Este sistema consiste en dos ejes o rectas que se cortan perpendicularmente, como ya se ha visto en temas anteriores. El eje horizontal se denomina eje de abscisas o de "x", mientras que el vertical es el eje de ordenadas o "y". El punto común se denomina origen de coordenadas; a partir de este punto hacia la derecha se colocan los valores positivos de la variable "x", mientras que hacia la izquierda se encuentran los valores negativos.

En el eje de ordenadas se encuentran los valores positivos de "y" por encima del origen de coordenadas, mientras que los negativos se encuentran por debajo.



Como ya sabemos, a cada valor x del conjunto original le va a corresponder un valor y del conjunto imagen; estos pares de números van a constituir una serie de puntos A, B, C, . . . que se pueden representar en un sistema de ejes cartesianos rectangulares y que al unirse van a constituir la gráfica de la función.

Ej.: Sean los puntos A (2, 4), B (−1, 3), C (−4, −2), D (5, −4). Representarlos gráficamente en un eje de coordenadas rectangulares.



Por tanto un punto del plano queda definido mediante dos cifras que constituyen un par de valores donde la primera es la abscisa y donde la segunda será la ordenada de ese punto.

Par de valores (2,4)	→	Punto A
Par de valores (−1, 3)	→	Punto B
Par de valores (−4, −2)	→	Punto C
Par de valores (5, −4)	→	Punto D

Así pues, dada una función y = f (x), se obtendrán una serie de puntos en el plano, puntos que se unirán de una forma continua dando como resultado una línea que puede ser recta o curva que será la representación gráfica de la función dada y = f (x).

Han existido y existirán actualmente personas con una mente y con una inteligencia excepcionalmente dotada para poder realizar mentalmente difíciles cálculos y operaciones matemáticas.

Se recuerda a un esclavo negro que vivió en una plantación en el estado de Virginia llamado Tom Fuller y que, pese a ser analfabeto, asombraba a sus amos y a los visitantes realizando de memoria toda clase de sumas, restas, multipliceciones y divisiones.

También el inglés Birdder y más tarde el italiano Manguianuli fueron hombres que asombraron a sus contemporáneos realizando de memoria complicados problemas.

Jacques Inandi fue, junto a Skakunda, joven india de escasos conocimientos, los fenómenos más completos conocidos últimamente. Los dos acabaron exhibiéndose en los teatros y circos; la joven india hacía primero unas maravillosas interpretaciones musicales con una flauta y después se sometía a las preguntas de los espectadores.

Todos nosotros, amantes de las matemáticas, debemos practicar la realización de algunas operaciones sencillas con objeto de acostumbrar a la mente al uso de los números.

AFICION A LA ASTRONOMIA

Cualquiera que mire el firmamento, vea su magnificencia y se sienta empequeñecido ante la grandiosidad que observa, desde ese momento ya es un aficionado a la astronomía.

El ojo es, por supuesto, el primer instrumento astronómico que poseemos. Veremos constelaciones, localizaremos estrellas, observaremos cúmulos estelares, eclipses, cometas cercanos a nosotros.

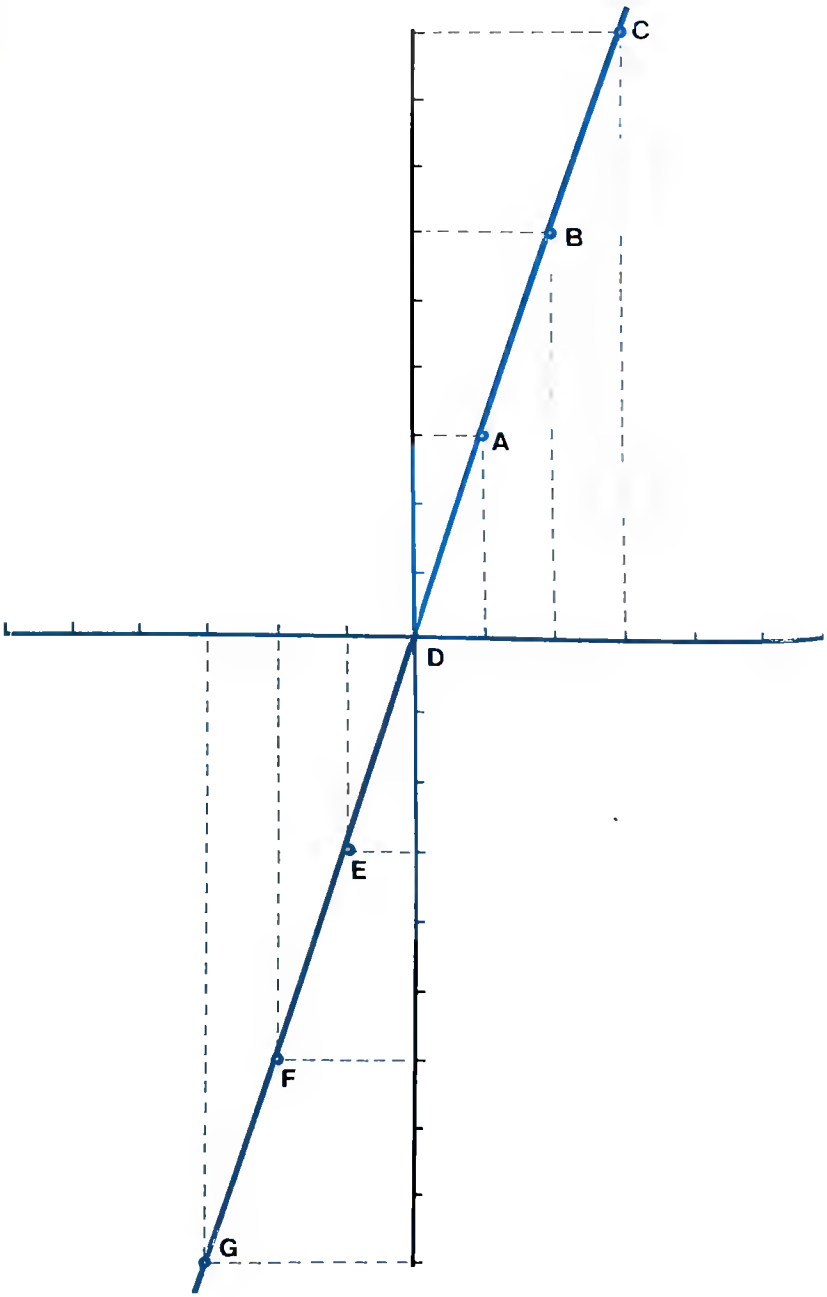
En el momento que sintamos esta curiosidad, tomaremos unos prismáticos y observaremos más detenidamente todo lo anteriormente dicho, sólo que más cercano. La Luna, con sus grandes mares (falsos, como el mar llamado "Mar de la Tranquilidad"), satélites, cometas, y con este segundo paso ya nos está entrando une gran afición (incluso vicio) para llegar a penaar en el rey de los instrumentos astronómicos: EL TELESCOPIO.

Ej.: Representar gráficamente la función $y = 3x$.

Realizamos la escala:

	A	B	C	D	E	F	G
x	1	2	3	0	−1	−2	−3
y	3	6	9	0	−3	−6	−9

Representamos los puntos en los ejes cartesianos y los unimos para obtener la función.



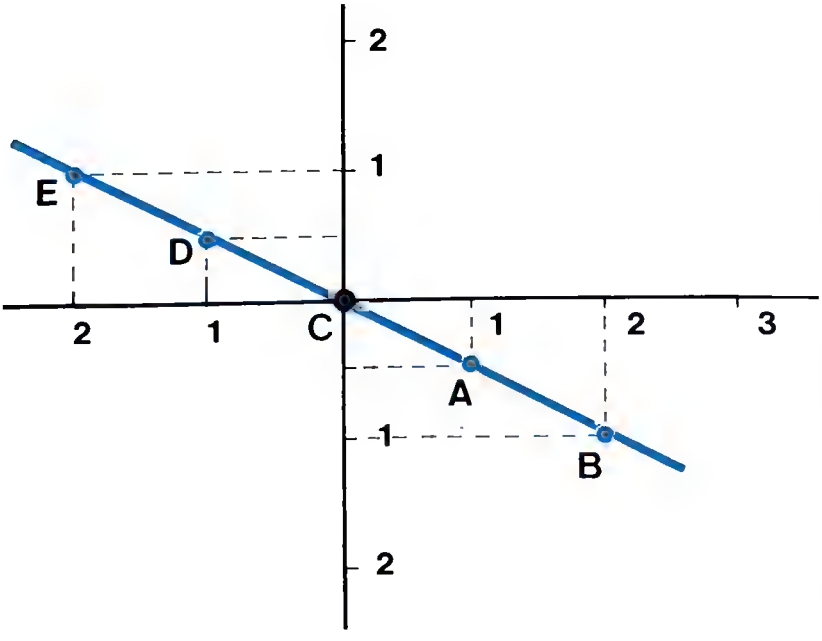
3.2. Estudio gráfico de la función de tipo $y = ax$

Este tipo de funciones en las que la x aparece con exponente uno se caracterizan por tener como representación gráfica una línea recta, cualquiera que sea el valor o signo de "a". Por otro lado, al carecer de término independiente, necesariamente pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0, 0).

Ej.: Tomemos como muestra la función $y = -\frac{1}{2}x$ y representémosla gráficamente.

Realizamos la escala:

	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−1	−2
y	−0,5	−1	0	0,5	1



El convento de San Marcos de la ciudad italiana de Florencia está dedicado desde el año 1866 a exponer la obra pictórica de Guiodolino di Piero, que nació en 1387 y murió en 1455, fue religioso dominico adoptando el nombre de Fray Juan de Fiesole, pero el mundo lo conoce por el sobrenombre de "Beato Angélico". Aprendió toda la exquisited de las postreras luces del estilo gótico, avivadas por las recientes conquistas de la perspectiva espaciales del primer renacimiento toscano. En este convento residieron también San Antonino, que fue arzobispo; Fray Bartolomé, célebre pintor, y Jerónimo Savonarola, que fue prior.

En este edificio se suceden las estancias, los claustros e incluso las celdas con todas sus paredes y sus bóvedas decoradas por obras al fresco y en temple sobre tabla del beato Angélico, obras maestras de un auténtico humanismo religioso acorde con la propia visión del pintor. En Fray Angélico es importante el empleo de la luz, una luz que llena el espacio y que el artista difunde en todas sus pinturas prestando a los colores unos acentos de pureza absoluta. Esta atmósfera siempre limpia, primaveral, hace fácil imaginar un desarrollo artístico, donde nunca parece faltar la certeza de la fe.

HISTORIA DE LA MATEMATICA

LOS MAYAS

Los mayas fueron unos grupos indígenas que sobre el 1500 antes de J. C. ocuparon la parte central de América. Con formas rudimentarias de agricultura desarrollaron el cultivo del algodón, la calabaza, etc., alcanzando la civilización maya su pleno desarrollo en el siglo V de nuestra era.

Su mayor florecimiento lo consiguen en el siglo VII con la construcción de magníficos templos en piedra labrada en las ciudades de Palenque, Tikal, Copan, Piedras Negras, etc.

Se crearon ciudades-estado, para su gobierno, y al frente de ellas estaba el "halach uinic". El rey era hereditario, así como algunos nobles y los sacerdotes, a cuya cabeza se encontraba el "señor serpiente". También existían los plebeyos y los esclavos; estos últimos podían serlo por nacimiento o como castigo.

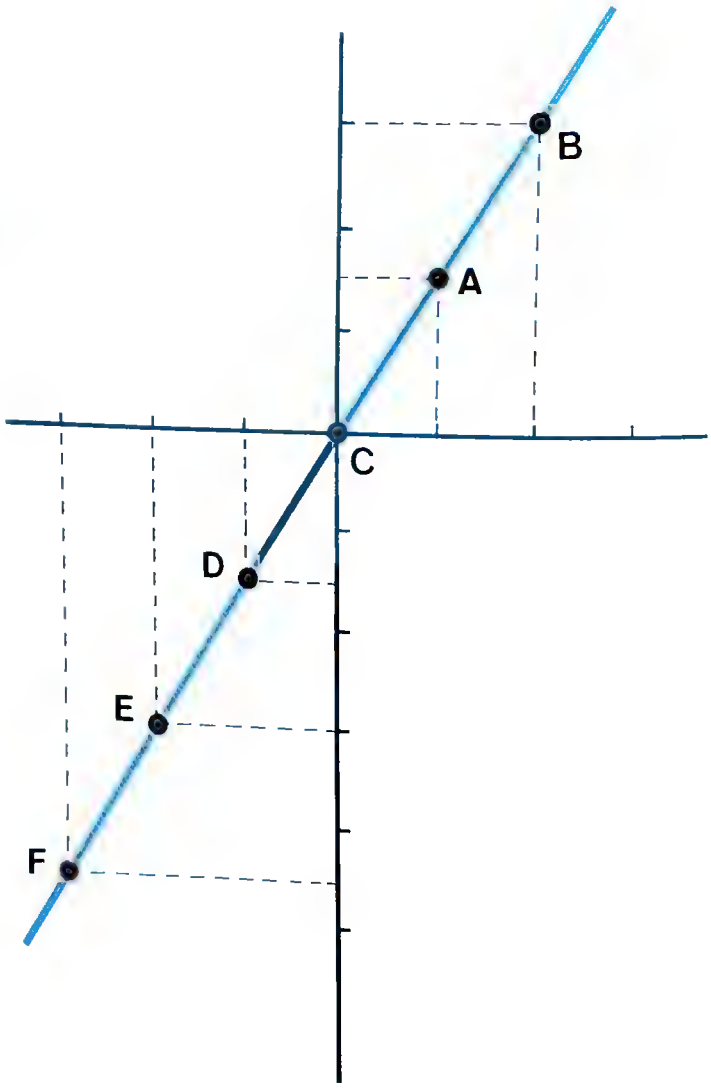
Tenían un dios más importante, creador del mundo: "Honab Ku" y otros muchos dioses más en distintas categorías a los que hacían sacrificios de alimentos y también humanos.

Continúa en la página siguiente.

Ej.: Sea ahora la función $y = \frac{3}{2}x$

Realizamos la escala:

	A	B	C	D	E	F
x	1	2	0	−1	−2	−3
y	1,5	3	0	−1,5	−3	−4,5



Vemos, como se enunció anteriormente, que las dos funciones por carecer de término independiente pasan por el eje de coordesiempre son líneas rectas, es decir, estas funciones no son ni más ni menos que la ecuación de una línea recta.

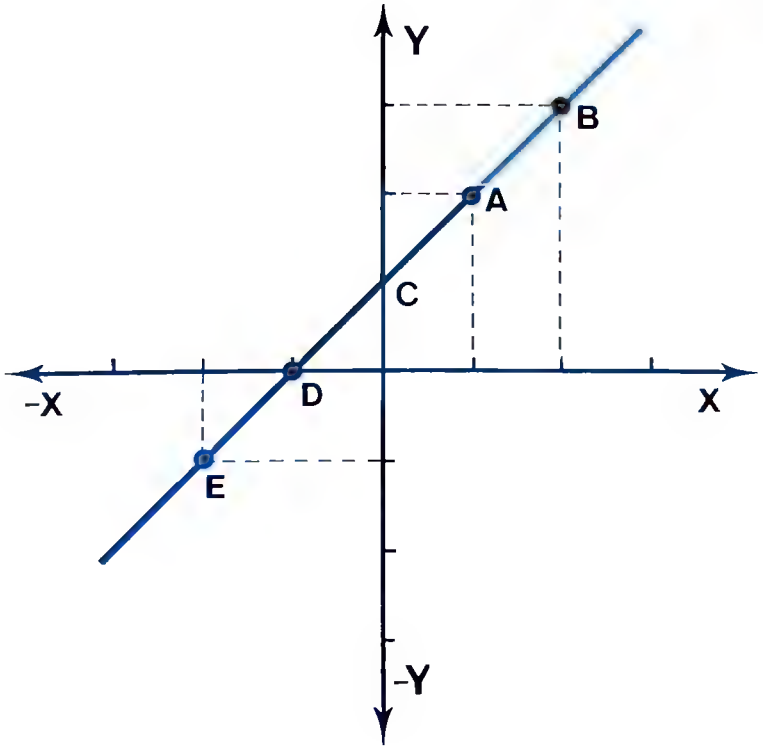
3.3. Estudio gráfico de una función de tipo y = ax + b

En este tipo de función la x también aparece con exponente uno; cabe por tanto preguntarse qué diferencias hay entre la función anterior y la del presente caso. La única diferencia está en que en esta función sí existe término independiente y por tanto a la hora de representarla vamos a tener una línea recta, pero con la diferencia de que ésta nunca pasará por el origen de coordenadas.

Ej.: Sea la función $y = x + 1$.

Realizamos la escala:

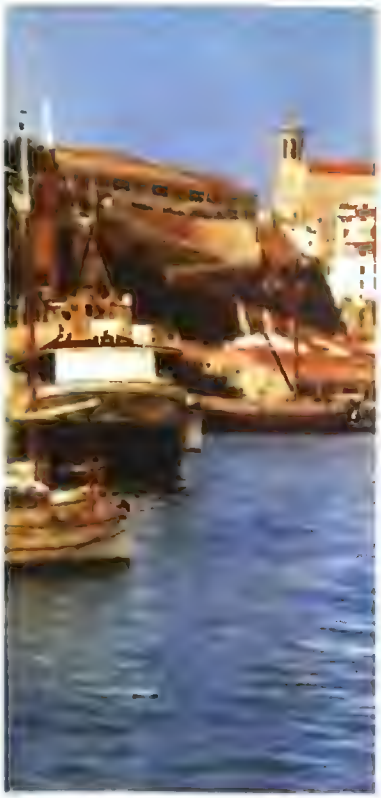
	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−1	−2
y	2	3	1	0	−1



En aritmética se regían por el sistema vigesimal y tenían un signo equivalente a nuestro 0. Los números del 1 al 4 se representaban por medio de puntos, el 5 por una barra horizontal y del 6 al 19 por medio de barras y puntos. Tenían dos calendarios: el ritual, de 13 números y 20 nombres de días, y el solar, de 18 meses, de 20 días más cinco días aciagos al final.

A causa de su dominio de las matemáticas y del sistema de calendarios, la Astronomía para los mayas era más conocida que para los europeos de su época.

En arquitectura destaca la falsa bóveda o bóveda de saledizo, para cubrir espacios alargados y estrechos. Destacan también los relieves de las estelas así como la pintura mural lo mismo que su cerámica de gran colorido y bellos y originales dibujos.



Sabemos que el número 37 es primo. Existe un número (o varios) que es divisible por 37 y todas las cifras son **iguales.**

37

Solución en Pág. 688.

Ej.: Tomemos otra función, $y + 4 = 2x$. Vamos a representarla.

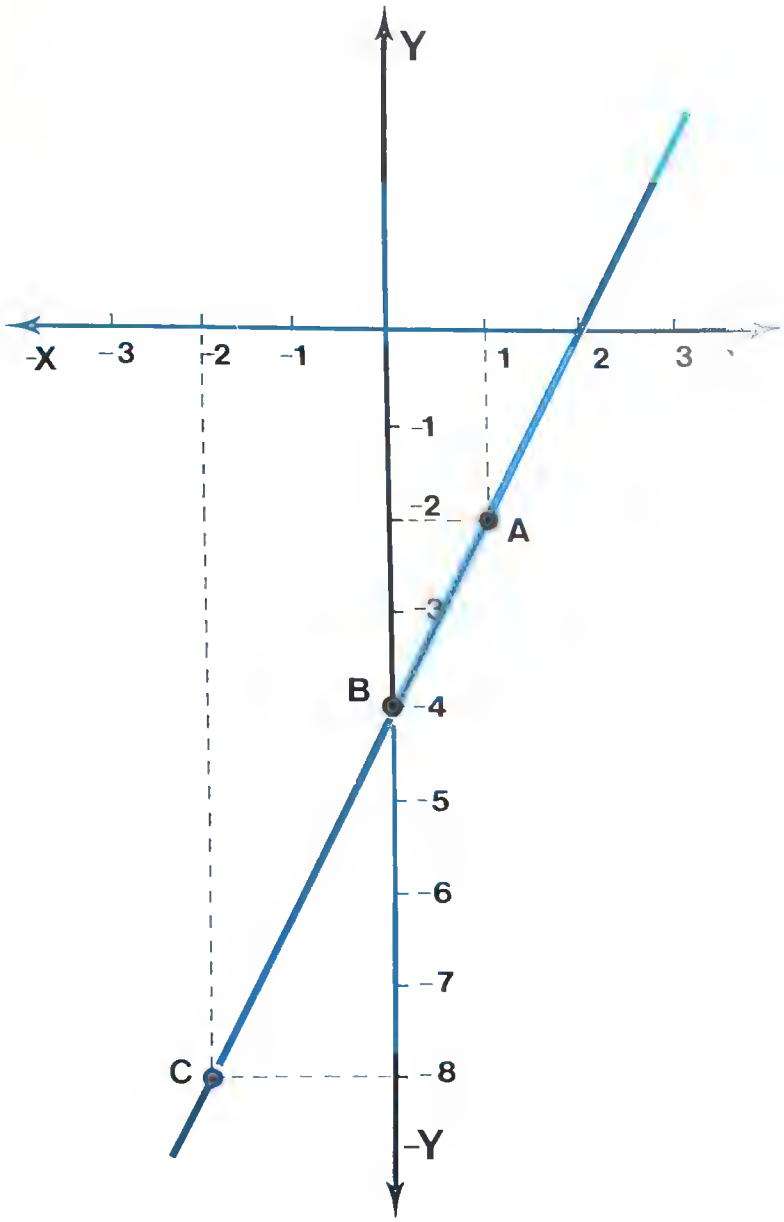
Como se ve, la función está en forma implícita; para poder representarla tenemos que colocarla primero en forma explícita, despejando la "y".

$$y + 4 = 2x$$

$$y = 2x - 4$$

Realizamos la escala:

	A	B	C
x	1	0	−2
y	−2	−4	−8



Ej.: Sea la función $15x + 3y = 30$

Primero la ponemos de forma explícita:

$$15x + 3y = 30$$

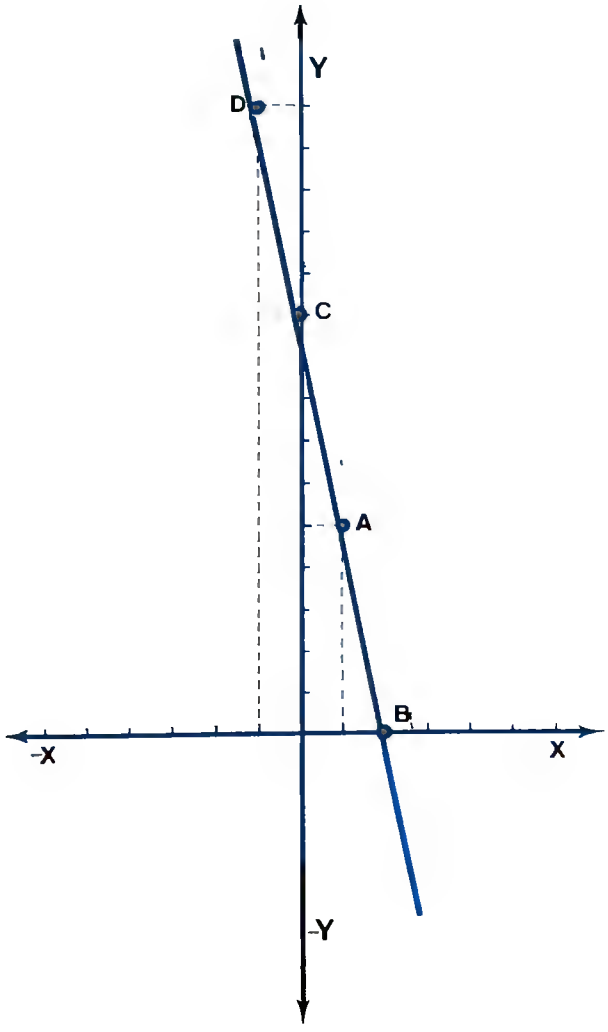
$$3y = 30 - 15x$$

$$y = \frac{30 - 15x}{3} = \frac{30}{3} - \frac{15}{3}x$$

$$y = 10 - 5x$$

Realizamos la escala:

	A	B	C	D
x	1	2	0	−1
y	5	0	10	15



2.—DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA

a) **Cuantitativamente.**—En los diferentes estudios que se han hecho para medir la inteligencia de los niños a partir del primer año de vida y en varios intervalos, se descubrió que los valores del C.I. sólo manifestaban cierta constancia a partir de los 3-4 años. Sin embargo, la mayoría de los investigadores afirman que hasta los 8-9 años no se puede preveer o anticipar el nivel de C.I. que tendrá un adolescente a los 15-16 años.

Pero no debemos olvidar que el desarrollo de la inteligencia puede modificarse por la influencia de factores físicos, psíquicos, afectivos, ambientales, sociales, etc.

b) **Cualitativamente.**—Considerando la inteligencia en su aspecto cualitativo, es más práctico seguir la tesis de Piaget que habla de 4 estadios o momentos importantes en el desarrollo del pensamiento en el niño:

1.—Estado de la inteligencia sensorio-motriz (0-24 meses).

2.—Estado del pensamiento pre-operacional (2-6/7 años).

3.—Estado de las operaciones concretas (7/8-11/12 años).

4.—Estado de las operaciones formales (11/12-15/16 años).

En la antigua Grecia, para resolver situaciones con diversos puntos de vista, se recurría a los amigos dándoles poder y autoridad para hablar en nombre de una de las partes litigantes. Alguno de éstos adquirió tal reputación, que era solicitado por personas extrañas a defenderlas ante los magistrados de la nación. La edad mínima que había que tener para realizar tal menester, era 17 años y sin discriminación de sexo, hasta que un edicto prohibió a las mujeres ejercer tal trabajo.

En España cualquiera podía defender a una de las partes, ya que las fórmulas se regían sólo por el "Fuero Juzgo" y el "Libro de los Jueces", incluso se podía defender a sí mismo, pero, con la única salvedad de que no lo podía hacer por su esposa o por sus criados.

Los alcaldes estaban obligados por la ley a defender a las doncellas, viudas o huérfanos.

Muchos de los defensores alcanzaron tal notoriedad que se consideraban como abogados en ejercicio, por su facilidad de palabra y los argumentos de convicción.

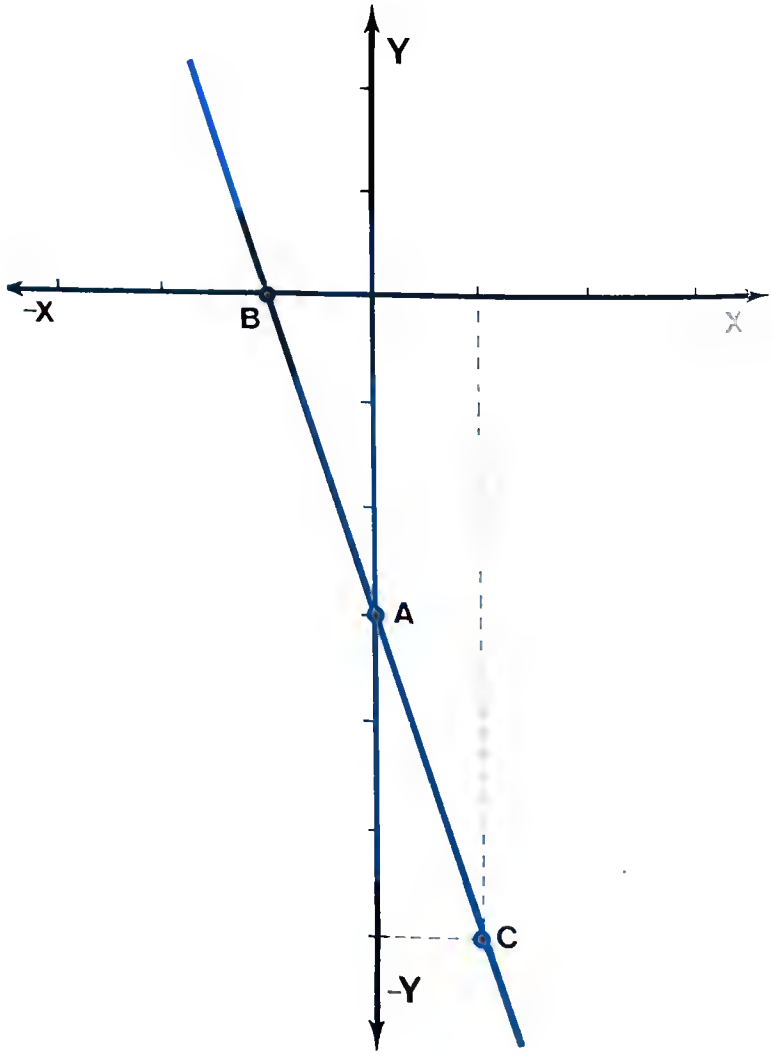
Hasta que en el reinado de Alfonso X el Sabio se profesionalizó la carrera. Se exigía ser varón, mayor de 21 años, examen previo, aprobación por el magistrado, juramento de fiel cumplimiento de su oficio, y ya se inscribía su nombre y matriculación correspondiente.

Este fue el nacimiento de la abogacía en el mundo y en particular en España.

Ej.: Sea la función $y = -3x - 3$. ¿Cuál sería su representación gráfica en unos ejes de coordenadas cartesianas rectangulares?

Como la función está ya en forma explícita, procedemos a la realización de la escala.

	A	B	C
x	0	−1	1
y	−3	0	−6



3.4. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2$

Este tipo de funciones en las que x aparece con exponente 2 se caracterizan por tener como representación gráfica una línea curva, simétrica, de forma parabólica, cualquiera que sea el valor o el signo de "a". Por otro lado al carecer de término independiente necesariamente pasará por el origen de coordenadas, punto (0,0), donde tendrá su vértice.

Dentro del estudio de este tipo de funciones se pueden presentar dos casos típicos: cuando "a" toma valores positivos y cuando "a" toma valores negativos.

CASO N.º 1.: Cuando "a" toma volares positivos la función será del tipo $y = ax^2$.

Ej.: Supongamos la función $y = 2x^2$. ¿Cuál será su representación gráfica?

Primeramente tenemos que ver si la función está en forma explícita o implícita. Recordando lo anteriormente visto se observa que esta función está en forma explícita; el paso siguiente consistirá en trazar los ejes de coordenadas cartesianas rectangulares y calcular la tabla de valores que posteriormente trasladaremos al gráfico. El último paso consistirá en unir estos puntos para obtener la gráfica.

Todos los problemas que ponemos aquí, tienen múltiples motivos, unos para calcular, otros para divertir o entretener, o sea, que aquí cabe todo, siempre y cuando sea formativo. Los problemas de atención también tienen su lugar. A veces alguno de estos problemas no tienen ni pies ni cabeza, ni razón, o sea son verdaderos disparates al leerlos. Sin embargo, todos tienen su motivo de insertarlos en estos laterales o ladillos, y para ejemplo ahí va uno de ellos.

Busque bien el motivo, porque es real.

PROBLEMA DE ATENCION

El señor X es una persona muy celosa de su trabajo.

El señor X, cumpliendo con su trabajo habitual, al salir por una puerta y no llevar bien la cuenta, muere.

¿Por qué?

La solución en Pág. 688.

La serpiente cobra es una de las especies más venenosas de la familia de los elápidos, con más de 180 especies y que se da en todos los países cálidos de Africa y Asia. Son de una gran talla, pues pueden llegar a los 6 m de longitud, siendo la "cobra real", la mayor de todas las serpientes venenosas. Son muy agresivas, sobre todo cerca de su nido, que hacen en el suelo. Este nido tiene como dos pisos, en el de abajo depositan los huevos entre hojas y en el de arriba se pone a vigilar la hembra acompañada a veces por el macho.

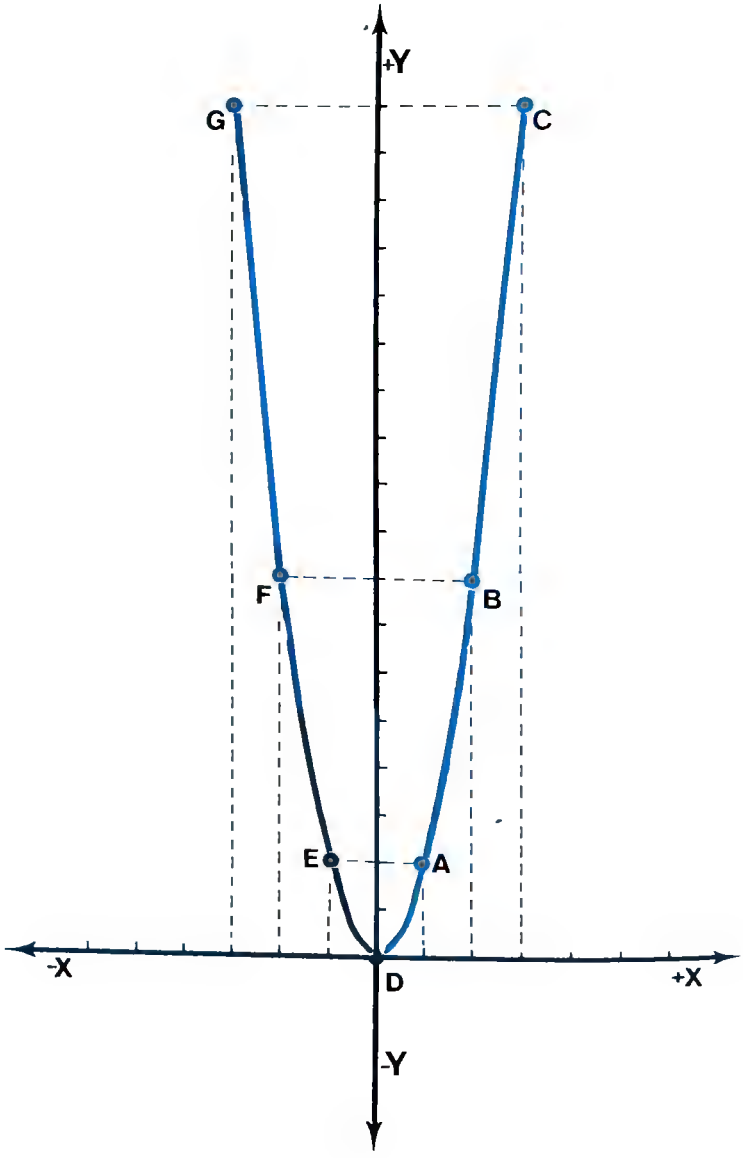
Tienen colores distintos, preferentemente rojizo y amarillo pardo. Suelen cazar por la noche o anocheciendo y al atacar y levantar las costillas de debajo de la cabeza da lugar al ensanchamiento del cuello aplanándolo a la vez, lo que le da su expresión característica.

La cobra india o serpiente de anteojos, llamada así por su capuchón, que tiene unas manchas que parecen el dibujo de unos ojos, es más pequeña que la cobra real pues suelen ser menores de 2 m y en la antigüedad eran adoradas lo mismo en la India como en Egipto donde se las puede ver representadas en monumentos y con los encantadores de serplentes que no las "encantan" con la música, puesto que son sordas, sino con sus gestoa.

Exlsten distintas eapecles en Africa como la eglpcla, la de cuello negro, etc., que son menores en tamaño y peligro que las aslá-ticaa.

Demos a x valores comprendidos entre 3 y −3 y calculemos sus imágenes:

	A	B	C	D	E	F	G
x	1	2	3	0	−1	−2	−3
y	2	8	18	0	2	8	18



Como se ve en la gráfica, la función toma siempre valores positivos y existe una simetría con respecto a la parte positiva del eje 0Y. A este tramo positivo del eje de ordenadas se le conoce con el nombre de eje de la parábola y al punto (0,0), que en el gráfico corresponde a la letra D, se le conoce como vértice de la parábola.

Ej.: Sea la función $4y = x^2$.

Esta función pertenece al mismo tipo que la anterior; pero al contrario que ella, se encuentra en forma implícita. Por tanto el paso primero que tenemos que realizar es colocarlo en forma explícita:

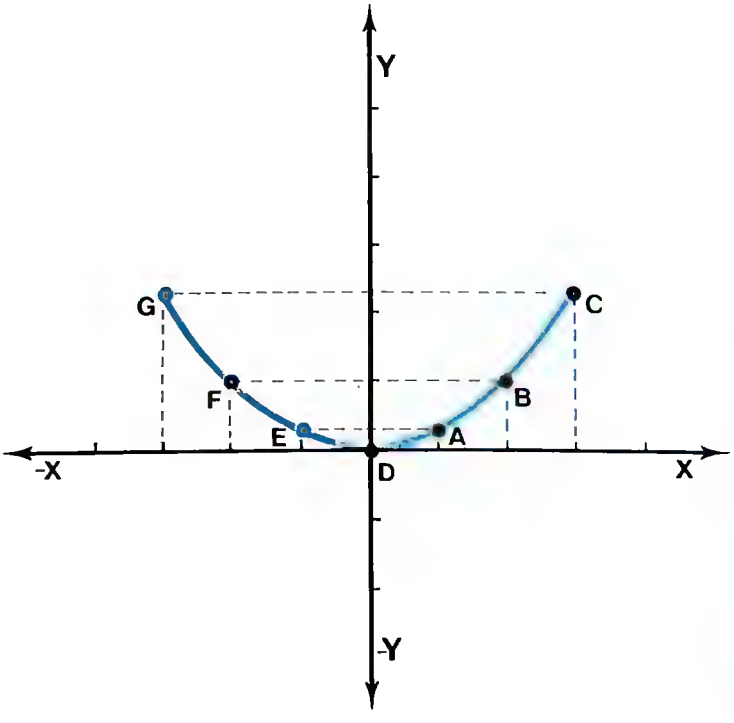
$$4y = x^2$$

Despejando y, queda:

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

A continuación operamos de la misma forma que en el caso anterior.

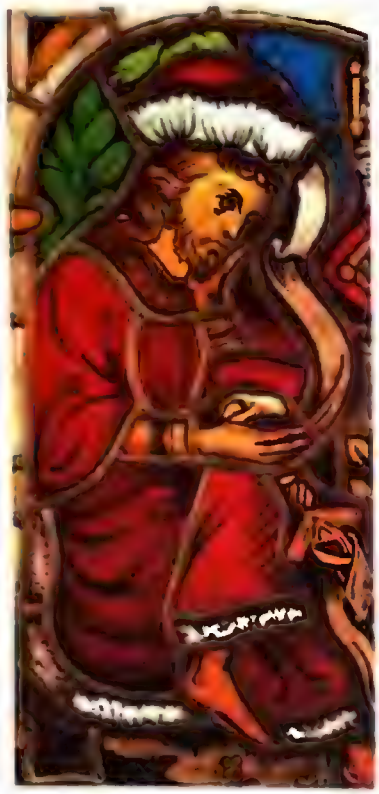
	A	B	C	D	E	F	G
x	1	2	3	0	−1	−2	−3
y	0,25	1	2,25	0	0,25	1	2,25



DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS".

Los contenidos se van presentando al alumno con una **mínima dificultad creciente** para que, de forma casi imperceptible, vaya adquiriendo los nuevos conocimientos, sin dificultades notables que puedan desanimarle. Empleamos el sistema de "aproximaciones sucesivas" aplicado a la enseñanza.

BERNABE TIERNO



Se tiene por leyenda mitológice la invención del ajedrez. Unos lo atribuyen al príncipe Eubea, que lo creó durante las largas veledes de inactivided a que se veía sometido en el sitio de Troya. Más célebre y bonita es la historia del brahman indio Sissa, el rey Sirham y los granos de trigo; también se atribuye su paternided al egipcio Thot· se han encontrado tableros ajedrezados y las primeras fichas —distintas naturalmente a les de hoy— en la tumba del egipcio Armamú que vivió 3000 años antes de Cristo. Por otra perte también se atribuye a los persas, al filósofo babilonio Xerses y en último lugar a los árabes.

Lo que resulta fácil de demostrar es que en Europa se empezó a conocer y a practicar en la Edad Media y que fue introducido por los árabes, a la vez que fueron extendiendo sus conquistas territoriales. Así podemos afirmar que éste es un antiquísimo juego, en el que se mezcla la habilidad y la ciencia.

Los primeros libros que tratan de ajedrez están fechados en el

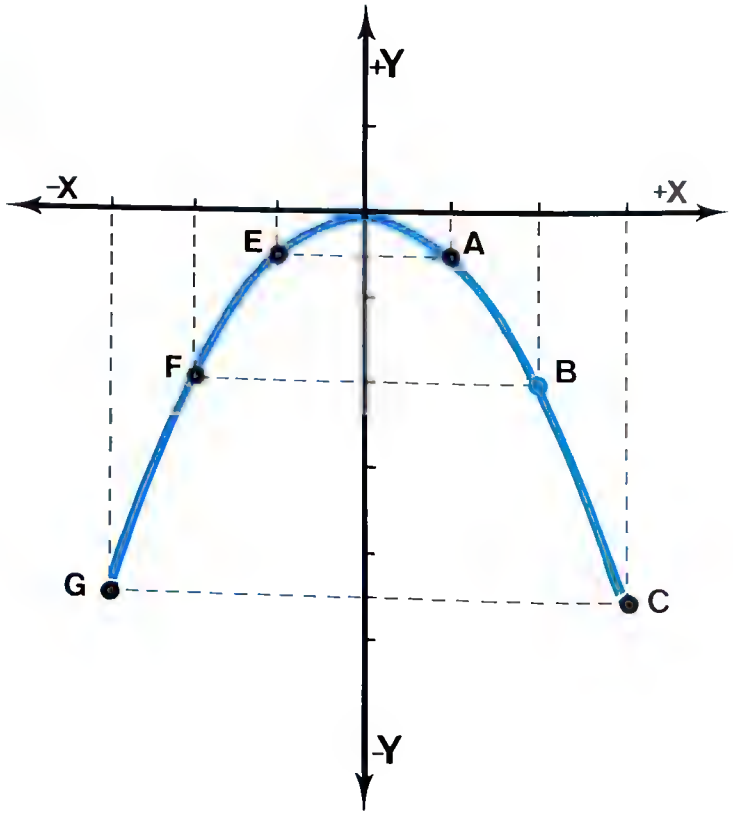
Continúa en la página siguiente.

CASO N.º 2.: Cuando "a" toma valores negativos, la función será del tipo $y = -ax^2$.

Ej.: Supongamos la función $y = -\frac{1}{2}x^2$

Como ya se ve, la función se encuentra en forma explícita, por lo que pasamos directamente a dar valores a "x" y calcular su imagen "y".

	A	B	C	D	E	F	G
x	1	2	3	0	−1	−2	−3
y	−0,5	−2	−4,5	0	−0,5	−2	−4,5



Como se ve en la gráfica, la función toma siempre valores negativos, existiendo una simetría con respecto a la parte negativa del eje 0Y, al que se le dará el nombre de eje de la parábola; y el punto (0,0), que corresponde a la letra D, continúa siendo el eje de la parábola.

En caso de que nos den dos funciones que presenten el mismo valor de "a" pero con distinto signo, la representación gráfica nos dará dos parábolas simétricas, entre sí, con respecto al eje 0X.

Ej.: $y = 3x^2$

$y = -3x^2$

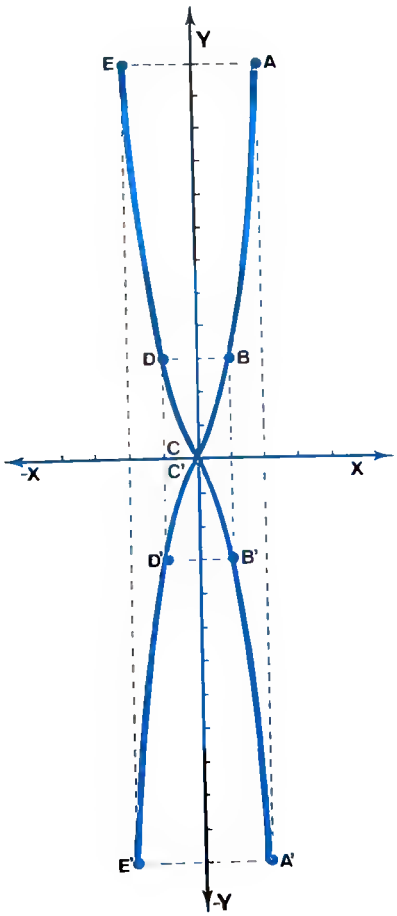
Como se ve claramente, la forma en que se presentan las funciones nos permite pasar directamente a la realización de las tablas de valores.

$y = 3x^2$

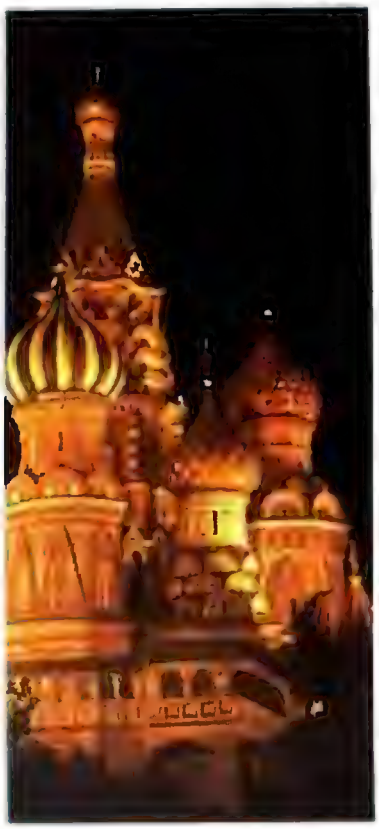
	A	B	C	D	E
x	2	1	0	−1	−2
y	12	3	0	3	12

$y = -3x^2$

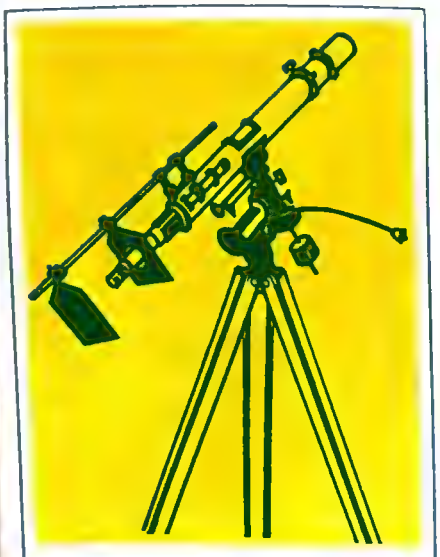
	A'	B'	C'	D'	E'
x	2	1	0	−1	−2
y	−12	−3	0	−3	−12



La figura nos muestra que el punto A es simétrico con A', el B con el B', el D con el D', y el E con el E' respecto al eje 0X. El punto C coincide con el C' en el origen de coordenadas siendo el vértice de las dos parábolas.



siglo IX, sus autores Al-Adli y Al-Razi describen unas jugadas que no tienen las características actuales. Tal y como se practica hoy día se inició en tiempos de Lucena en 1490 y fue perfeccionado técnicamente por Ruy López en el año 1500, alcanzando su época clásica en 1747 que dio su verdadero valor a los peones. En estos tiempos se practicaba un juego arriesgado, basado en la emboscada y en la encerrona. Fue Andersen quien inició la época romántica basada en la belleza de la combinación y el vigor en el ataque. En 1851 adquiere rango olímpico al celebrarse en Londres el Primer Torneo Internacional. En 1866 Steinitz abre nuevos caminos a base de luchas posicionales, donde destaca el célebre Capablanca. Por último Breyer lanza sus teorías modernistas de bloqueo y juego indirecto, que abrió el camino al juego actual dominado principalmente por los jugadores rusos, que salvo alguna brillante individualidad americana y europea son los grandes conquistadores de campeonatos y trofeos.



EL TELESCOPIO

Existen en tiendas especializadas, diversos tipos de telescopios pere àficionados. Recomendamos los de 4 a 10 cm de diámetro de refracción y de 8 a 12 cm de reflexión. Con ellos podemos ver, incluso con detalle, las superficies de Júpiter con sus satélites, Saturno con sus anillos, Marte, etc.

Pare disfrutar de mejor observación hay que buscar un lugar lo más plano posible, que tenga poca luz, y libre de cualquier obstáculo (árboles o edificios) que nos pueda impedir una buena visión.

No entreremos en los detalles de las características técnicas de cada aparato. Hoy ya se hacen instrumentos perfectos con el movimiento necesario normal, además de con mecanismos de relojería incorporedos.

Por ejemplo: los telescopios suelen llevar tres oculeres. Con el ocular general, se logra un campo de visión bastante amplio; esto sólo nos sirve para centrar la imagen, el objeto que deseamos estudiar. Una vez hecha esta centralización, cembiamos de lente u ocular a uno de más potencia y así observarlo con más precisión.

3.5. Estudio gráfico de la función de tipo $y = ax^2 + b$

La función que vamos a estudiar a continuación es del mismo tipo que la vista anteriormente, con la única excepción de un término independiente "b" que va a determinar que la parábola nunca pueda pasar por el origen de coordenadas, punto (0,0).

Dentro del estudio de este tipo de funciones se pueden presentar 4 casos ya que ahora la representación gráfica no va a depender sólo del valor de "a" sino que también va a influir el valor de "b".

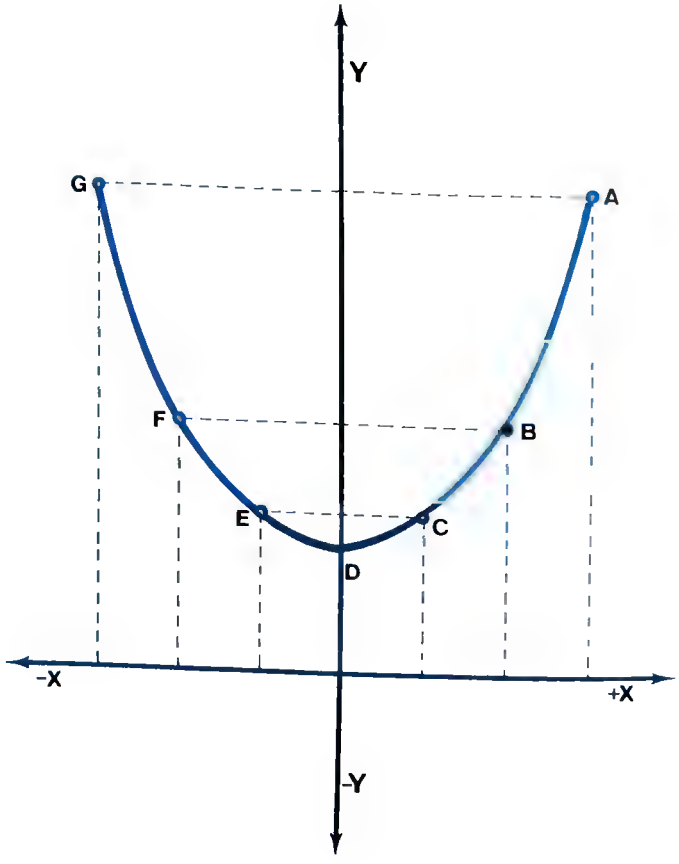
Analicemos estos casos.

CASO N.º 1.

Ej.: $y = x^2 + 4$

Como la función está en forma explícita pasamos directamente a la realización de la tabla de valores.

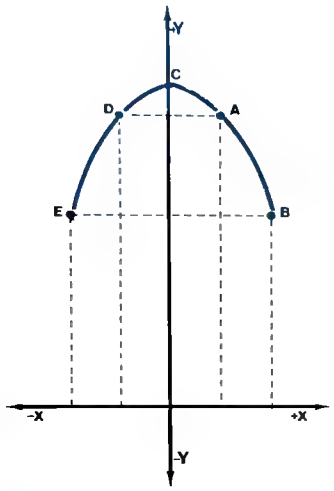
	A	B	C	D	E	F	G
x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	13	8	5	4	5	8	13



CASO N.° 2 Ej.: $y = 8 - x^2$

Procedemos directamente a la realización de la tabla de valores como en el caso anterior.

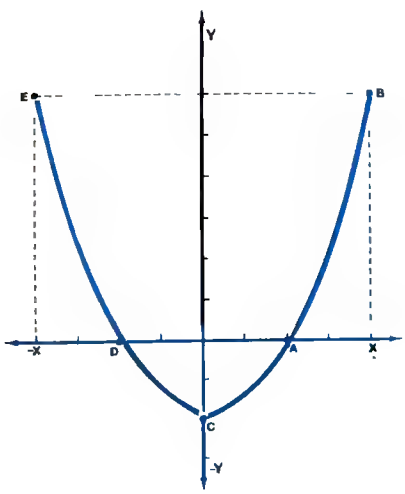
	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−1	−2
y	7	4	8	7	4

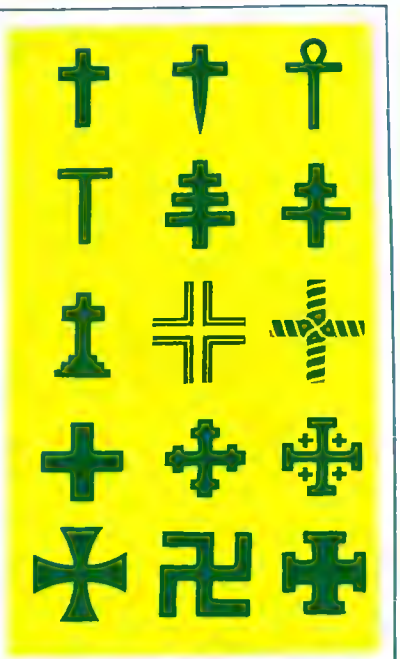


CASO N.° 3 Ej.: $y = \frac{x^2 - 4}{2}$

Realicemos la escala de valores:

	A	B	C	D	E
x	2	4	0	−2	−4
y	0	6	−2	0	6





Si es cierto que en un principio la cruz fue un patíbulo en el que murieron miles de hombres a consecuencie de los terribles sufrimientos que recibían el morir clavados o atedos a sus maderos, y que el emperedor Constantino mandó suprimir esta formie de ejecución en honor a le Pesión de Cristo, también lo es que siempre fue un motivo ornamental y simbólico que con geniosas veriaciones sufrides a través de los tiempos ha servido de escudo y de guíe e muchas ideas religiosas y políticas. Como símbolo de la muerte y triunfo de Cristo eperece en los primeros siglos del Cristienismo reuniendo en torno a elle a los apóstoles y e los primeros conversos. Entre las formas más frecuentes vemos le cruz griega de cuatro brezos iguales; le cruz latina, con el brazo transversal más corto que el verticel; la cruz egipcia, en forme de T sin el trozo vertical superior. La cruz ausada, símbolo de la vide eterna; la cruz svástica, de remotos orígenes asiáticos y relacionada con antiguos cultos soleres... Hoy, aperte de la Iglesia católica, podemos reconocer e la Cruz Roje, célebre organismo internecionel cuyo distintivo de neturelided protege a todos los heridos y enfermos en tiempo de guerra y que continúa su meritoria lebor asistencial tembién en las épocas de pez.

Los instrumentos precursores del piano son: el clevicordio y el clavecín; el primero con un sonido suave y dulce pero débil; el segundo tenía un sonido más fuerte y pleno, pero menos expresivo.

En el siglo XVIII artesanos franceses y elemenes consiguieron crear un instrumento mezcla de los enteriores, llamado pianoforte, ya que sólo con la manipulación del artista podía pasar del piano el forte. El sonido del pianoforte es fuerte y amplio y al despegarse el macillo que golpea le cuerda con rapidez, hace que no se apaguen sus vibraciones, una sordina hece que estas vibreciones no se mezclen con la note siguiente.

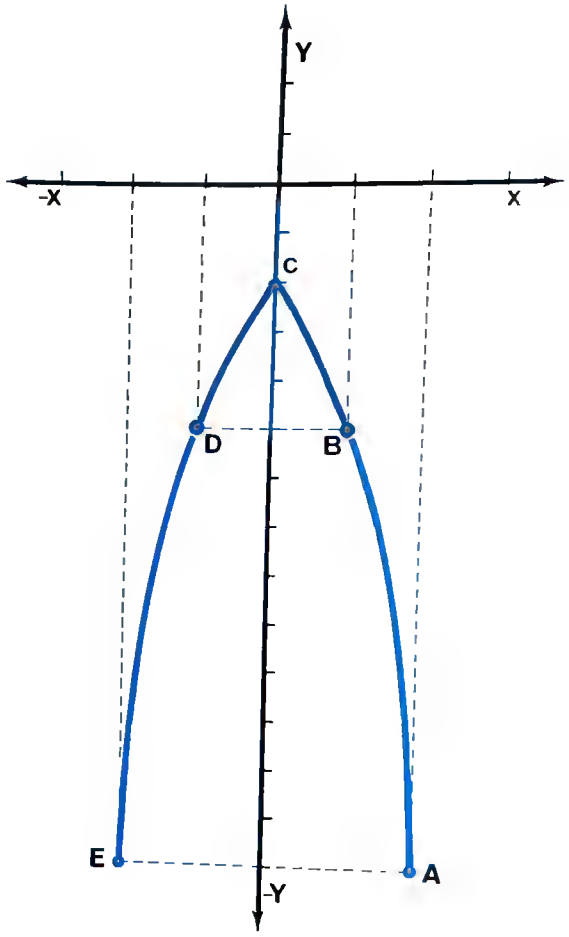
El piano va genando importencia sobre el clevecín, Mozart hace varias obras para el instrumento nuevo, lo mismo que Beethoven. La forme externa también se fue modificando, y a mediados del siglo XIX prevalece la perecida al clavecín, con las cuerdas de triángulo. Existen distintos tamaños: el pequeño colín y el gran cola, que se usa en los conciertos, y para hacerlo más manejable se fabrica un modelo con las cuerdas verticales.

En la Scala de Milán, en el año 1839, Franz Listz, el mago del piano, hará por vez primera un programa solamente de pleno y seré un éxito colosal.

CASO N.º 4. Ej.: $y = -3x^2 - 2$

Realizamos la escala:

	A	B	C	D	E
x	2	1	0	−1	−2
y	−14	−5	−2	−5	−14



Si observamos las gráficas de los cuatro casos, veremos que las parábolas presentan su vértice siempre en el eje de ordenadas OY, bien en la parte positiva, bien en la parte negativa, estando determinado esto último por el valor que tome el término independiente "b". Si $b > 0$, es decir positivo, el vértice se encontrará situado siempre en la zona positiva del eje OY, como vemos en los casos 1 y 2; si $b < 0$, es decir negativo, el vértice se encontrará situado en el tramo negativo del eje OY, como vemos en los casos 3 y 4.

Por otro lado, la parábola se abre hacia arriba cuando $a > 0$, es decir, cuando es positiva, casos 1 y 3, y se abre hacia abajo cuando $a < 0$, es decir, cuando es negativa, casos 2 y 4.

3.6. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^2 + bx + c$

Tanto este tipo de función como las dos anteriores son funciones de segundo grado; por tanto su representación gráfica será también una parábola que, como en el caso anterior, nunca pasará por el origen de coordenadas. El hecho de poseer un nuevo término determina que la representación de la función se haga más variada y compleja.

Por tanto, para representar esta parábola es necesario seguir los siguientes pasos:

1.º) Encontrar los puntos de corte de la función con el eje de coordenadas OX y esto se realiza haciendo $y = 0$, con lo cual la función se transforma en una ecuación de segundo grado completa (véanse temas anteriores) $0 = ax^2 + bx + c$.

2.º) Calcular el eje de simetría, ya que, como sabemos, una parábola es una curva simétrica y por tanto presenta un eje. El cálculo de este eje se puede realizar de dos formas, bien mediante la semisuma de las soluciones obtenidas en el paso anterior $h = \frac{x_1 + x_2}{2}$, bien mediante la operación $\frac{-b}{2a}$; se vio en capítulos anteriores que la suma de las raíces tenía como solución: $S = \frac{-b}{a}$, como en este caso se trata de la semisuma de estas raíces la operación a realizar será la siguiente:

$$\frac{S}{2} = \frac{-b}{a} \times \frac{2}{1}$$

Haciendo la división de quebrados tendremos:

$$\frac{S}{2} = \frac{-b}{2a}$$

que como se ve coincide con la fórmula indicada anteriormente.

3.º) Se calculan las coordenadas (x, y) del vértice de la parábola. El valor de x es el obtenido al hallar el eje de simetría, y para encontrar el valor de "y" no tenemos más que introducir este valor de "x" en la ecuación de segundo grado dada (función).

4.º) Se realiza una tabla de valores.

Estudiemos algunos casos:

Ej.: Sea $y = x^2 - 6x + 5$.

1.º) Calculamos los puntos de corte con eje 0X.

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

ABREVIATURA

Viene de la palabra latina "abbreviatura" y es la representación abreviada de la palabra en la escritura.

La abreviatura es une fórmula que ha ido en desuso con el paso del tiempo. Se empezó a usar para ganar tiempo y ahorrar material en los papiros y pergeminos.

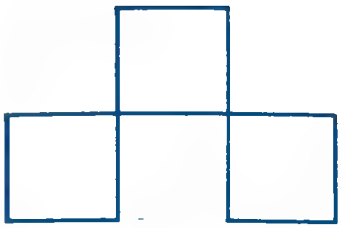
Existían sistemes empleedos, como ebreviatura por sigles, que eren letras aisladas que significaban palabres (éste es quizá el sistema más empleado hoy día, como por ejemplo: S. A., en lugar de Socieded Anónima; S. L., U. C. D., P. S. O. E., etc.); abreviatures por contracción, que es le supresión de letres en el interior de una palabra, como puede ser, ej. (ejemplo), pts. (pesetas), etc.

La abreviatura fue un gran problema pare los primeros impresores, ya que existían eutores que al user sus propias abrevieturas les obligaban e éstos (los impresores) a tener que estar pidiendo continuemente tipos nuevos de imprente.

Hoy, incluso, también se usa, pero sólo con moderación en las partituras musicales, para simplificar la escriture y lecturas musicales omitiendo repetición de notas e incluso compases iguales.

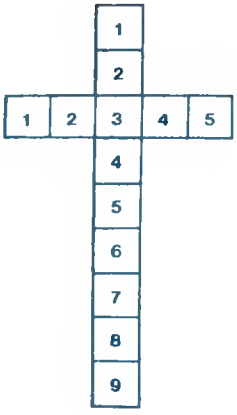
SOLUCION AL PROBLEMA DE LOS PALILLOS (pág. 654)

Este, como primer problema de los que iremos poniendo después, es bien fácil, no hay más que quiter como sigue:



SOLUCION AL PROBLEMA DE LA CRUZ (pág. 648)

La señora del embejador sólo sabía que en la parte más larga de la cruz había 9 brillantes, no sabía cuántos había en la parte más corta. Nada más fácil que hacer lo siguiente:



La pulió después y se la devolvió como si fuera nueve. La señora **reconoció** la cruz y tan contenta quedó del trabajo que además de ebonárselo... le dio propina.

$$x_1 = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

2.º) Calcular el eje de simetría.

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$h = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

3.º) Calcular las coordenadas del vértice (x, y). Como la x toma necesariamente el valor 3 obtenido en el paso anterior la y tomará el valor

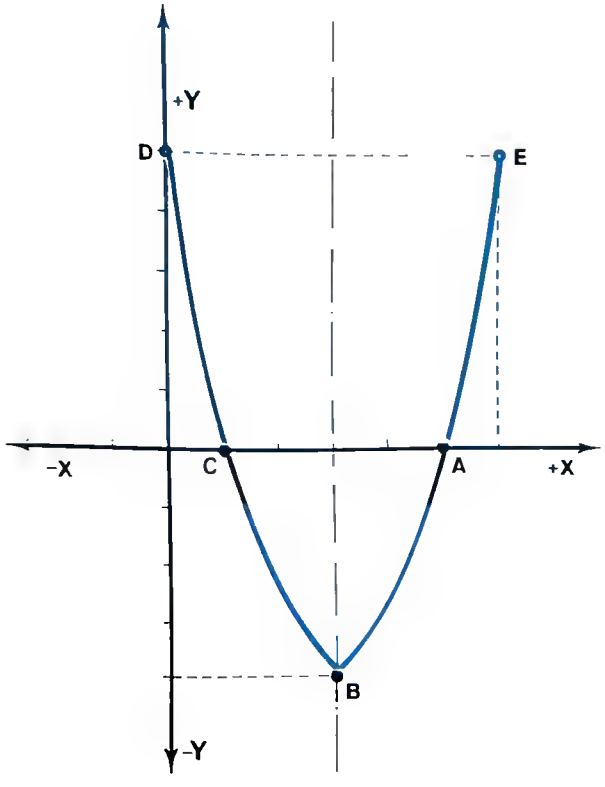
$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$$

Coordenadas del vértice $(3, -4) = B$

4.º) Realizamos la tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	5	3	1	0	6
y	0	−4	0	5	5



Ej.: Sea $y = 5 - 4x - x^2$.

1.º) Cálculo de los puntos de corte.

$$0 = 5 - 4x - x^2$$

Ordenamos la función

$$-x^2 - 4x + 5 = 0$$

Cambiamos de signo toda la ecuación para tener x^2 positiva.

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

COMO MIRAR A TRAVES DE UN TELESCOPIO

Recordamos no mantener demasiado tiempo el ojo pegado al ocular; las observaciones deben ser breves; una observación larga, además de provocar fatiga, puede ocasionar pérdida de visión.

Conforme vaya pasando el tiempo, el aficionado va ganando en experiencia y veterania, hasta tal punto que cuando se es, no ya un astrónomo experto, sino un veterano, se sabe en qué época se observa mejor un cuerpo dado y qué hora es la que goza de más riqueza de observación. Se da el caso de que al observar cualquier astro, existe algún detalle que nos pasa desapercibido, debido al cansancio de los ojos, cuando mirando a pequeños intervalos estos detalles no se nos escaparían. Todo ello, y lo repetimos una vez más, lo da la veterania.

El mejor lugar para hacer observaciones astronómicas es el campo, porque hoy día el enemigo número uno para dichas observaciones es la polución atmosférica de las grandes ciudades.

Por ello hemos visto que los observatorios astronómicos están en parajes elevados para obtener una observación más clara.

En la antigüedad, y sobre todo en Grecia y Roma, las fuentes tuvieron una gran importancia como motivos ornamentales y demostración de riqueza y arquitectura. Entre las primeras destacan las fuentes de Corinto y Siracusa y en Roma las monumentales de Ostia y Timgad.

En toda Italia existen preciosas fuentes. En Perugia existe la femosa fuente Mayor, comenzada a construir en 1275 y acabada en 1278, que es de dos pisos en forma de polígono con estatuas y adornos en relieve. En Siena están le Fonte Nouva, gótica, y la Fonte Gaia. En Florencia destaca la fuente de Neptuno. Las más importantes fueron la fuente de los Ríos, construida por Bernini, y la Fontana de Trevi, con una fachada que parece la de un palacio, creación de Salvi y Mami a principios del siglo XVIII.

Destacan en el resto de Europa la fuente de Eros en Inglaterra, las de Versalles en Francia, y el Manneken Pis de Bruselas. En España tenemos sobre todo de la época árabe, pueblo muy amante del edorno con el agua, les fuentes y surtidores de la Alhambre en Granada. En Madrid destacan las de la Cibeles, Neptuno y Apolo. Las deliciosas de Aranjuez y la Granja, y la de Carlos Buigas en Montjuic de Barcelona, preciosa fuente luminosa.

2.º) **Eje de simetría:**

$$h = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

3.º) **Coordenadas del vértice:**

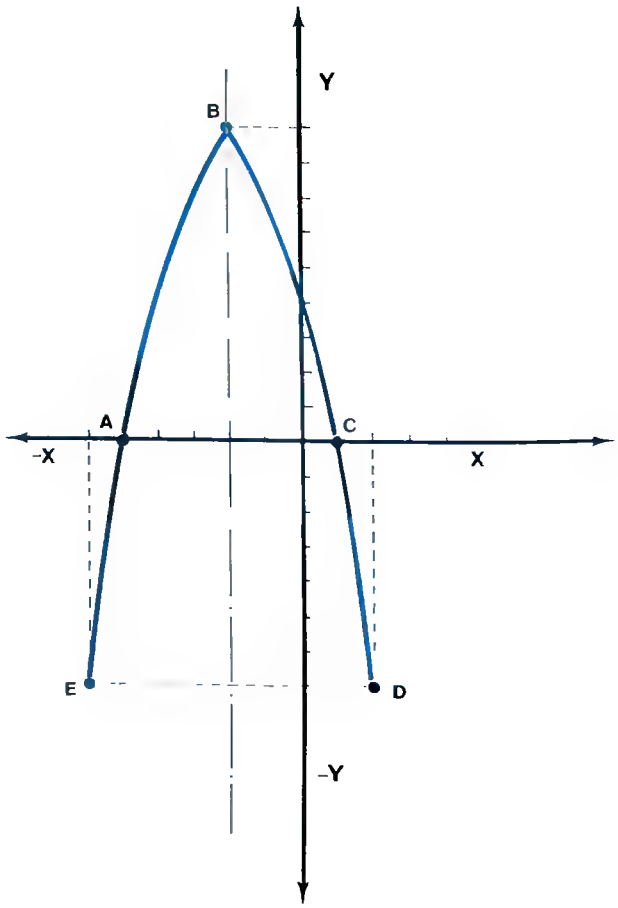
Si $x = -2$

$$y = 5 - 4\,(-2) - (-2)^2 = 9$$

Coordenadas $(-2,\ 9)$

4.º) **Tabla de valores:**

	A	B	C	D	E
x	−5	−2	1	2	−6
y	0	9	0	−7	−7



Ej.: $y = (x - 3)(x + 2)$

Para representar esta función, primero realizamos la operación indicada multiplicando los paréntesis.

$$y = x^2 + 2x - 3x - 6$$

$$y = x^2 - x - 6$$

1.º) Calculamos los puntos de corte $0 = x^2 - x - 6$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{1 - 5}{2} = -2$$

2.º) Eje:

$$h = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

3.º) Vértice: Si $x = \frac{1}{2}$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4} = -6{,}25$$

Coordenadas (0,5; 6,25)

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS".

Procuraremos que cada contenido nuevo que se ofrece al alumno esté firmemente esentado sobre el contenido básico inmediatamente anterior en complejidad y, a su vez, que cada contenido adquirido sirve de base sólida sobre la que descansan los contenidos que siguen.

Bernabé Tierno

No se conocen las formas o métodos con que el hombre primitivo consiguó obtener fuego. En la actualidad el fuego es conocido en todo el mundo, aunque los habitantes de las Islas de Andarman se limitan a conservarlo, pues desconocen la forma de encenderlo.

Existían varios procedimientos para encender el fuego: los más corrientes eran por frotación tipo sierra o por frotación en círculo o taladro. Esta última fue la más usada sobre todo en Africa y América del Sur. También el fuego que conservaban las vestales en el Altar de Vesta lo obtenían por el método de taladro.

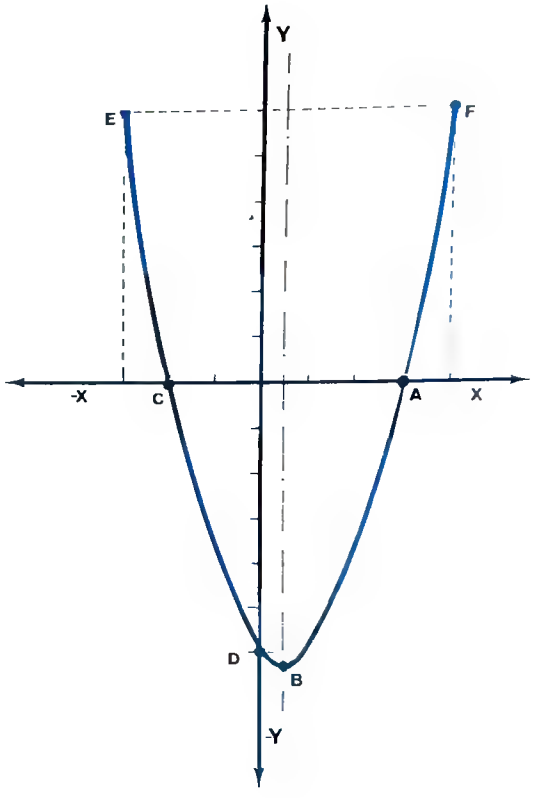
Con el descubrimiento de la pólvora se crearon las armas de fuego. La primera de ellas fue la espingarda, siendo sustituida posteriormente por otras más perfeccionadas, hasta llegar a los fusiles y las armas modernas de gran poder destructivo.

Vulcano era considerado como el dios del fuego y se representaba en una fragua.

También existe una leyenda muy difundida sobre los fuegos fatuos, que dicen se manifiestan por la noche y que se trata, según los campesinos de ciertas partes de Europa, de esplritus o almas en pena que vagan por los lugares deshabitados; algunos creen que señalan sitios donde hay tesoros, pero ya decimos que se trata de leyendas.

4.º) Tabla de valores:

	A	B	C	D	E	F
x	3	0,5	−2	0	−3	4
y	0	−6,25	0	−6	6	6



Ej.: Sea $y = x^2 - 8x + 16$.

1.º) Puntos de corte:

$$0 = x^2 - 8x + 16$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{8 + 0}{2} = 4 \qquad x_2 = \frac{8 - 0}{2} = 4$$

2.º) Eje de simetria:

$$h = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

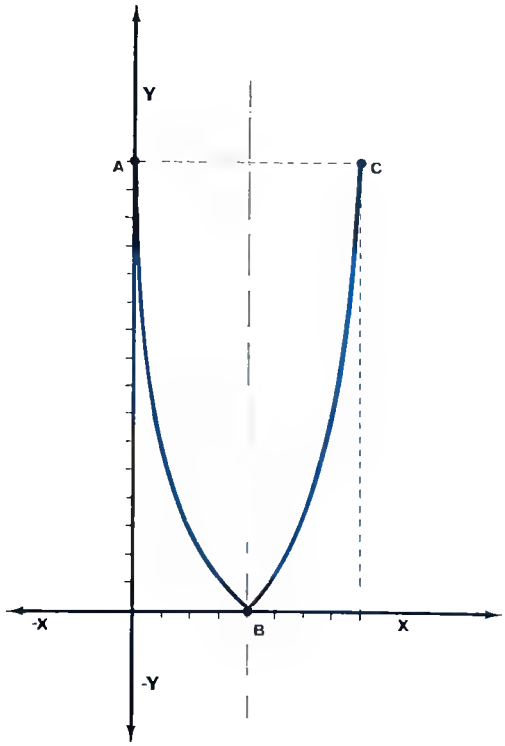
3.º) Vértice: Si $x = 4$

$$y = 4^2 - 8 \cdot 4 + 16 = 0$$

Coordenadas (4, 0)

4.º) Realizamos la tabla:

	A	B	C
x	0	4	8
y	16	0	16



NOTA.—Cuando las dos soluciones de la ecuación de segundo grado coinciden, hay un único punto de corte con el eje 0X que coincide siempre con el vértice de la parábola.

Ej.: Sea $y = x^2 - 2x + 15$.

1.º) Puntos de corte:

$$0 = x^2 - 2x + 15$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{2}$$

Por ser la raíz de un número negativo, la ecuación no tiene solución en el campo de los números reales, esto quiere decir que no hay ningún punto de corte con el eje 0X.

3. ¿EN QUE MEDIDA INFLUYEN LA HERENCIA Y EL AMBIENTE EN SER MAS O MENOS INTELIGENTES?

Sobre este tema han corrido ríos de tinta y se han aducido razones de todo tipo, tanto por parte de los genetistas como de los ambientalistas; sin embargo, han sido los estudios realizados con gemelos los que han dado más luz sobre este tema.

Los estudios realizados con gemelos idénticos criados en ambientes idénticos arrojan una correlación de inteligencia superior a 0,90. Si los gemelos idénticos se crían en ambientes diferentes, la correlación oscila alrededor del 0,75. Por otra parte, la correlación entre gemelos no idénticos, o entre hermanos y hermanos, es notablemente menor, sobre 0,52 a 0,53. Si los gemelos no idénticos viven en ambientes distintos, la correlación baja de 0,40 (Butcher, 1968). Todo lo dicho nos lleva a concluir que el grado de inteligencia que alcanza por término medio un ser humano adulto **depende del ambiente desde un 50 a un 75 %.**

Es obligatorio admitir, pues, que hay unos factores que sirven de base a la inteligencia y que nos vienen dados genéticamente, pero que además existen otros factores adquiridos que dependen del ambiente en que se desarrolla el individuo. Este ambiente lo marcan fundamentalmente el hogar y la escuela.

LA COMETA

—¿Pero cómo quieres que te dé más cuerda? Ayer te di un ovillo entero para tu cometa —dijo la madre al niño—. ¿Qué harás con tanta cuerda?

—¿Qué haré? —dijo el niño—. Primero, ¿no me cogiste tú la mitad del ovillo para atar no sé cuántos paquetes? La otra mitad de lo que quedaba me la cogió mi hermano para atar paquetes de alfalfa.

—Debes de saber, hijo, que primero se tienen que tomar las cosas que son más necesarias, y, ¿no es más importante atar y ordenar la alfalfa para los animales, que tú juegues con tu cometa?

—Sí, pero luego papá me cogió la mitad de lo que me quedaba para utilizarlo como hilo de pescar, y de la otra mitad que me restaba, mi hermana me quitó también la otra mitad para, doblándola, hacerse un saltador o no sé que. Así que, ya estoy cansado de que todos me toméis el pelo por ser el más pequeño; y quieres decirme ¿cómo me las arreglo con 5 m. de cuerda para hacerme una cometa?

Se pregunta, y sin realizar ni una sola operación matemática, ¿cuántos metros tenía la cuerda al principio?

La solución en pág. 704.

2.º) Eje de simetría: como en el punto anterior no hemos obtenido soluciones, el cálculo del eje debe realizarse por el segundo método ya indicado a través de la fórmula:

$$h = \frac{-b}{2a} \qquad h = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

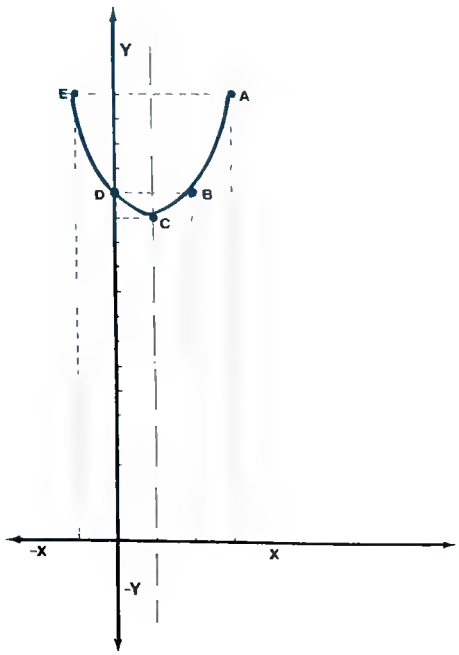
3.º) Vértice si x toma el valor 1:

$$y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 15 = 14$$

Coordenadas (1, 14)

4.º) Realizamos la tabla de valores.

	A	B	C	D	E
x	3	2	1	0	−1
y	18	15	14	15	18



Ej.: Sea $y = -5 + 4x - x^2$

1.º) Puntos de corte:

$$0 = -5 + 4x - x^2$$

Ordenamos la ecuación:

$$-x^2 + 4x - 5 = 0$$

Cambiamos de signo para tener x^2 positiva:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Aplicamos la fórmula para solucionar las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Como en el caso anterior, la ecuación no tiene soluciones en el campo de los números reales, por lo que la parábola no tendrá ningún punto de corte con el eje 0X.

2.º) Eje de simetría: $h = \frac{-b}{2a}$

$$h = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

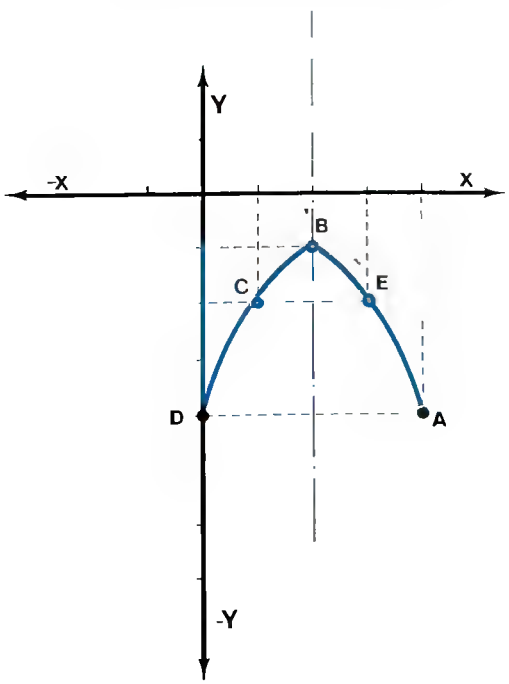
3.º) Vértice: Si $x = 2$

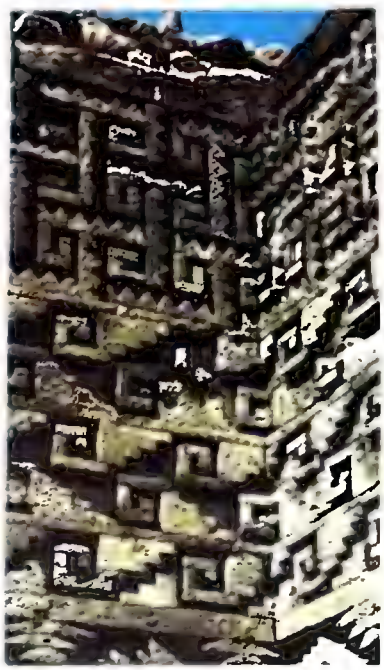
$$y = -5 + 4 \cdot 2 - 2^2 = -1$$

Coordenadas del vértice $(2, -1)$

4.º) Tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	4	2	1	0	3
y	−5	−1	−2	−5	−2





MATEMATICAS PRECOLOMBINAS

Los incas debieron tener, forzosamente, unos grandes conocimientos matemáticos, los cuales no han podido ser reconstruidos al faltar cualquier clase de vestigio escrito.

Sin embargo, sí se posee más información sobre la cultura maya, legada en jeroglíficos, manuscritos y en monumentos que han podido ser descifrados. El cálculo del tiempo y el calendario forzaron todas sus deducciones y estudios. Una vez reafirmados en estos estudios, se volcaron en los cálculos astronómicos.

Su era comenzaba en el año 3113 antes de J.C., siendo su primer día el 12 de agosto de dicho año. Sus estudios astronómicos fueron realizados durante 38 siglos. Existía en ellos dos clases de años, el ritual y el año solar real. Aunque diferentes en consideración, fueron exactamente igual en magnitud, ya que ambos contaban con **365** días.

La Aritmética fue dominada no solamente por el pueblo maya, sino también por el azteca, llegando a realizar cualquier tipo de cálculo usando como base el sistema vigesimal.

Se calcula que en la cabeza de una persona existe por término medio veintidós mil quinientos millones de cabellos. En el transcurso de un mes perdemos aproximadamente unos tres mil cabellos.

¿Cuánto tiempo dura en la cabeza cada pelo?

Por supuesto, el pelo que tarda más en caer es el más joven o más reciente. Si se pierden 3.000 en un mes, en un año se perderán 36.000 cabellos. En cuatro años se perderán cerca de 150.000 cabellos.

$150.000^2 = 22.500.000.000$

Entonces se ha determinado que la vida media de un cabello es de CUATRO AÑOS.

Aunque, también por término medio, el 100 × 100 de los calvos no están de acuerdo con esto, yo el primero. Resignación.

3.7. Estudio gráfico de una función de tipo $y = ax^3$

Estas funciones donde el exponente que presenta la variable x es un 3 se caracterizan por tener como representación gráfica una curva, pero no de forma parabólica.

Como, por otro lado, carece de término independiente, la gráfica tendrá que pasar por el punto (0,0) origen de coordenadas.

Al igual que en las estudiadas anteriormente se pueden presentar dos casos: cuando "a" toma valores positivos y cuando "a" toma valores negativos.

CASO N.º 1: Cuando "a" toma valores positivos, la función será del tipo $\mathbf{y = ax^3}$.

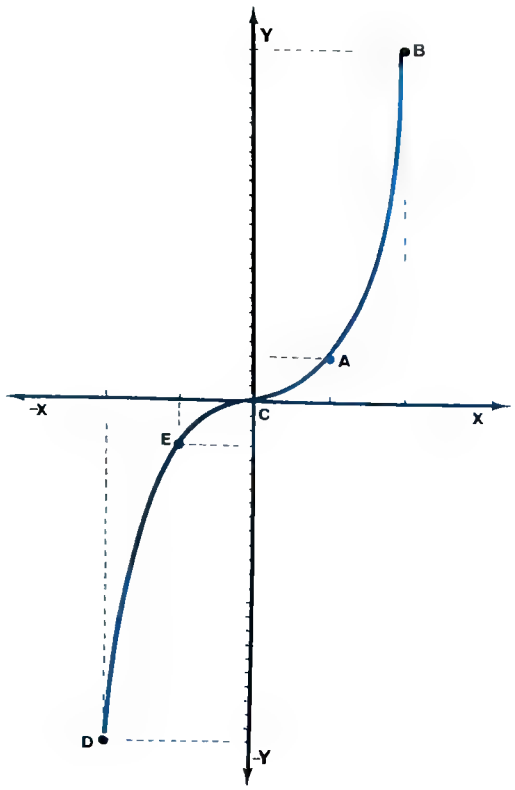
Ej.: Supongamos la función $y = 3x^3$. ¿Cuál será su representación gráfica?

Como la función se encuentra en forma explícita, no tenemos más que calcular la tabla de valores, trazar los ejes de coordenadas cartesianas, situar los puntos en éstos y dibujar por último la gráfica.

Demos a la variable independiente x, valores comprendidos entre 2 y −2 y pasamos a continuación a calcular las imágenes:

$\mathbf{y = 3x^3}$

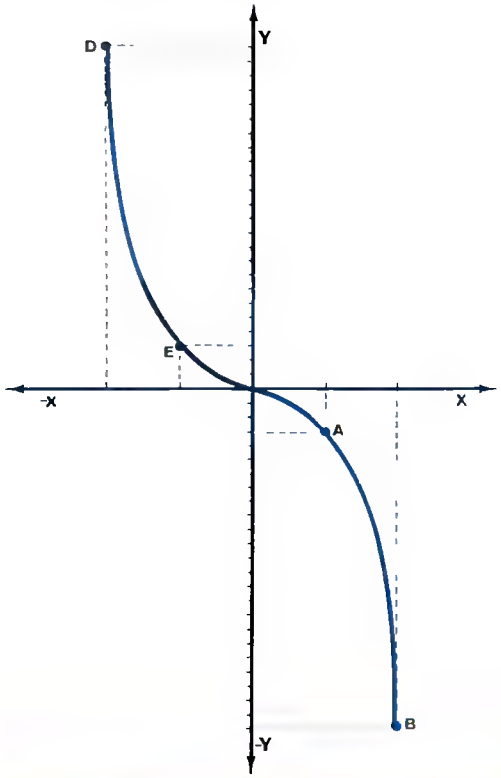
	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−2	−1
y	3	24	0	−24	−3



CASO N.º 2: Cuando "a" toma valores negativos, la función será de tipo $y = -ax^3$.

Ej.: Sea la función $y = -3x^3$, como ya está en forma explícita se realiza directamente la tabla:

	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−2	−1
y	−3	−24	0	24	3



3.8. Estudio generalizado de una función de tipo $y = ax^m$

Hasta ahora hemos estudiado casos muy generales de función donde el exponente de "x" variaba desde el valor 1 hasta el 3, dando a la hora de la representación una línea recta, una parábola, y una línea curva no parabólica, respectivamente. No obstante la función de la forma $y = ax^m$ puede presentar cualquier grado ya que "m" puede tomar todos los valores positivos y enteros.

Por tanto nos podemos encontrar con funciones del tipo:

$$y = -\frac{1}{5}x^{115} + x^{76} + 3x^{10} - 2$$

$$y = 8x^{20} - \frac{1}{2}$$

$$y = 25x^{50}, \text{ etc.}$$

Vamos a calcular mentalmente el cuadrado de un número de dos cifras y que acabe en 5.

El número dado es:

$$10\ a + 5$$

el cuadrado de éste será:

$$(10\ a + 5)^2$$

desarrollando tendremos:

$$(10\ a + 5)^2 = (10\ a)^2 + \\ + 2\ (10\ a \times 5) + 5^2 = \\ = 100\ a^2 + 100\ a + 25 = \\ = 100\ a\ (a + 1) + 25$$

O sea, que nos da un número (a), se multiplica por su inmediato superior (a + 1) y luego se le añade el n.º 25. Veámoslo prácticamente. Un número cualquiera (65) para elevarlo al cuadrado y mentalmente no tenemos más que multiplicar la cifra de las decenas (6) por su número inmediato superior (7) y añadirle la cifra 25. Tendremos entonces: $6 \times 7 = 42$ y a 42 se le añade la cifra 25 y nos da 4.225, que es el cuadrado de 65. Así nos saldrá una tabla:

$15^2 = 225\ (1 \times 2)$
$25^2 = 625\ (2 \times 3)$
$35^2 = 1.225\ (3 \times 4)$
$45^2 = 2.025\ (4 \times 5)$
$55^2 = 3.025\ (5 \times 6)$
$75^2 = 5.625\ (7 \times 8)$

y así sucesivamente. ¿Comprendido?

INVESTIGACION

En la Editorial Horizonte, hemos creado un pequeño y modesto equipo de investigaciones científicas pero en grado medio.

Casi todo el mundo sabe que en cada nación existen institutos de investigaciones científicas pero en gredo superior, es decir, se estudian complicadisimas fórmulas para cualquier estudio a realizar como, por ejemplo, descubrir materiales nuevos que pesen menos que los anteriores y que tengan el mismo o más alto coeficiente de resistencia. Se preocupan las naciones de la técnica en las altas matemáticas, pero ¿para qué sirve esto al estudiante de grado medio (E.G.B., B.U.P., C.O.U., Formación Profesional, etc.? Nosotros, modestamente, lo estamos al menos intentando, como así lo habréis visto en estos fascículos. Pero dentro de estos estudios, de vez en cuando y a la fuerza de realizar miles y miles de opereciones, hemos encontrado algo definitivo.

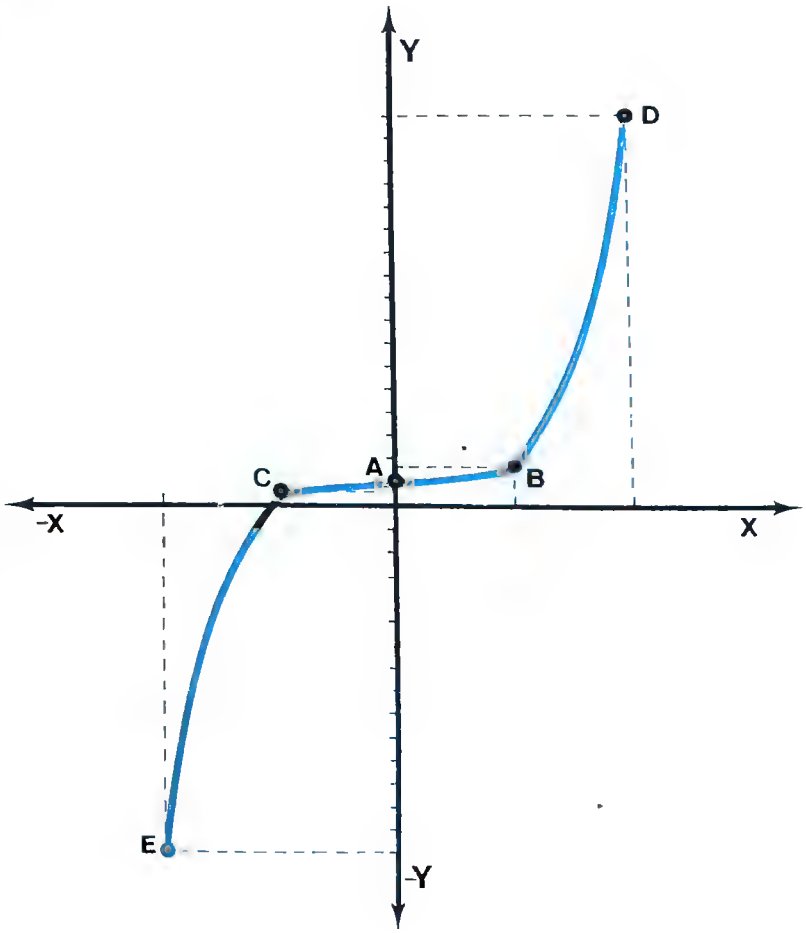
Continúa en la página siguiente.

Ahora bien nosotros tomaremos como ejemplo la función $y = \frac{1}{2}x^5 + 1$ por ser mucho más operativa que las anteriores al presentar la x un exponente menor:

$$y = \frac{1}{2}x^5 + 1$$

Como ya la tenemos de forma explícita pasamos directamente a la realización de la tabla de valores.

	A	B	C	D	E
x	0	1	−1	2	−2
y	1	1,5	0,5	17	−15



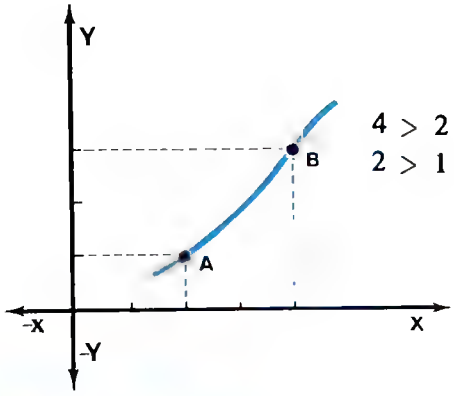
4.–CARACTERISTICAS GRAFICAS DE UNA FUNCION

Las características gráficas que vamos a ver están dadas de forma general. Un estudio más minucioso se realizará en temas posteriores cuando el alumno adquiera ciertos conocimientos necesarios para ello.

Las características principales en la representación de una función son:

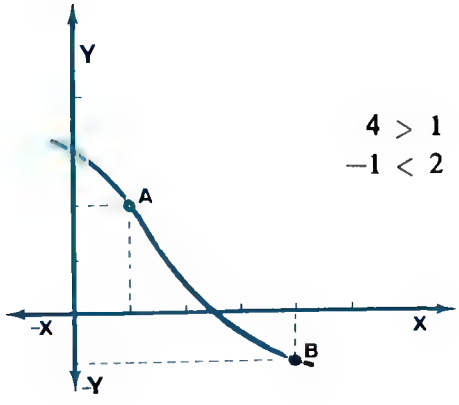
TRAMO CRECIENTE

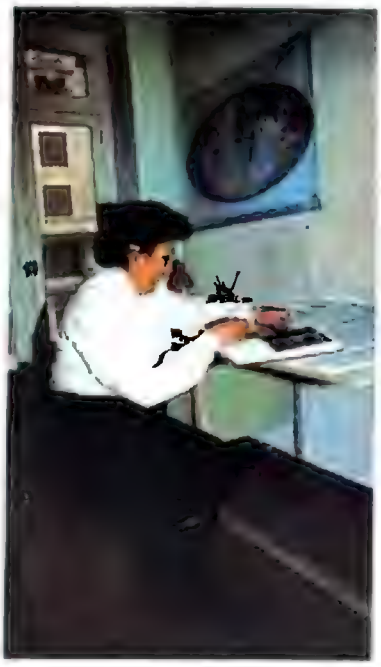
Se puede decir que un tramo de la representación gráfica de cualquier función es creciente cuando tomando dos puntos, cualesquiera, A y B de ella, éstos se caractericen porque al ser la "x" de B mayor que la "x" de A se cumpla que la "y" de B es también mayor que la "y" de A.



TRAMO DECRECIENTE

Se puede decir que un tramo de la representación gráfica de cualquier función es decreciente cuando tomamos dos puntos, cualesquiera, A y B, de ella, caracterizados por ser la "x" de B mayor que la "x" de A y se cumple que la "y" de B es menor que la "y" de A.





Pues bien, en el fascículo que salga el tema de logaritmos, habrá un ladillo (o dos) o laterales en el que demostraré palpablemente la comprensión de todos los logaritmos y en solamente una cuartilla, o lo que es igual en diez minutos. Quiero decir y prometer formalmente que en diez minutos voy a demostrar la perfección de los logaritmos, y lo que es más difícil, ENSEÑAR los varios cientos de páginas que quedarán explicados en una cuartilla.

Francisco Hernández Aroca
Febrero de 1983

NOTA: Sé que cuando esto salga muchos dirán que es el huevo de Colón. Pero no me negaréis que fue él quien primero lo puso en pie; posteriormente... los demás.

La reina Catalina de Médicis, en el año 1581 y con motivo de una boda entre nobles, encargó a Baltasar de Beanjoyense, violinista italiano, una obra como divertimento para estas fiestas, con lo que este violinista creó el llamado "Ballet cómico de la reina", de donde se cree tiene sus orígenes el actual ballet, aunque con el paso del tiempo fue cambiando y perfeccionándose.

Primero fue la comedia-ballet y luego la ópera-ballet y aunque al principio las representaban gentes de la corte, luego, al perfeccionarse fueron actuando bailarines y sobre todos destacaron las bailarinas Marie Sallé y Marie Anne de Cupis.

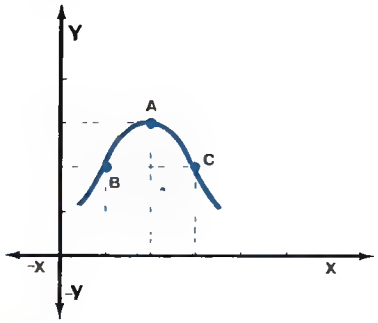
Es en el 1700 cuando el ballet se perfecciona en su expresión corporal y mueve gran cantidad de bailarinas en escena, destacando la Pallerini.

La bailarina italiana Carlota Grisi, unió en el siglo XIX las dos formas de ballet existentes entonces, el ballet blanco (llamado así por los vestidos de las bailarinas) y el ballet de carácter, que daba más importancia a los bailes de los distintos países, y con el ballet de "Giselle" creó la técnica de las puntas, que da más ligereza al baile. En un principio se dio poca importancia a la música, pero el ruso Tchai-

Continúa en la pág. siguiente.

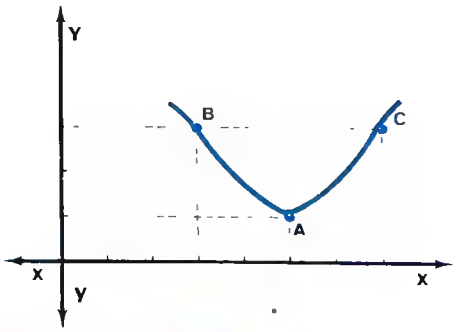
MAXIMO

Se dice que un punto A de una curva es un máximo cuando su ordenada (valor de y) es mayor que la de todos aquellos puntos que tiene a su derecha e izquierda, es decir, separa un tramo creciente de uno decreciente.



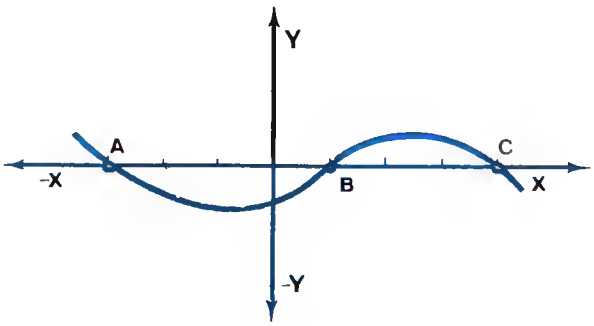
MINIMO

Se dice que un punto A de una curva es un mínimo cuando su ordenada (valor de y) es menor que las ordenadas de los puntos que tiene a su derecha e izquierda, es decir, separa un tramo decreciente de uno creciente.



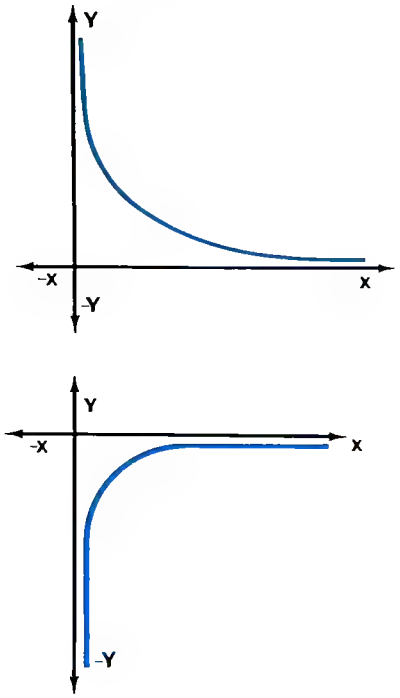
CEROS DE LA CURVA

Se denominan ceros de una curva a aquellos puntos de la gráfica de la función que cortan al eje 0X. La forma de calcularlos, como se ha visto en preguntas anteriores, es haciendo $y = 0$ y viendo qué valores puede tomar x.

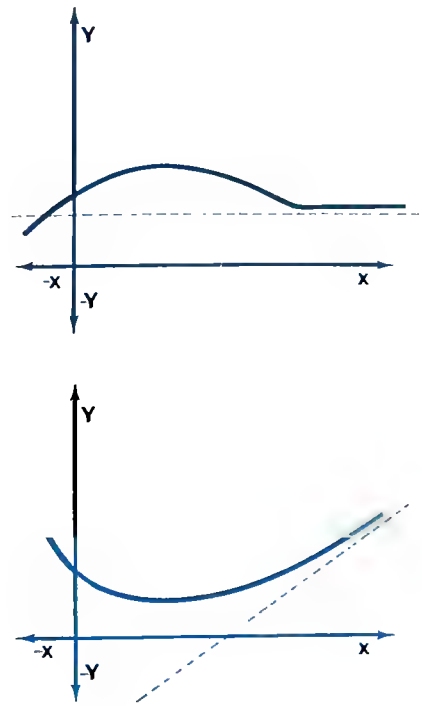


ASINTOTAS

Asíntotas de una curva son aquellas rectas a las que se aproxima la curva pero a las que sólo corta en el infinito. Las asíntotas de una curva pueden ser los ejes de coordenadas pero también puede ser cualquier otra recta del plano.



NOTA.—Los ejes de coordenadas pueden ser asintotas de una curva tanto en su tramo positivo como en su tramo negativo.



kowsky, con "El lago de los cisnes", "La bella durmiente" y "Cascanueces", dio una gran importancia a la misma, siendo la escuela de ballet rusa la más importante en el mundo. Los mejores músicos y poetas coreógrafos, figurinistas, etc., se ocuparon del ballet, creando piezas magistrales. El ballet se extendió por todo el mundo, destacando el Original Ballet Russe, los Ballets de Montecarlo, los Ballets Joss de origen alemán, el Ballet Real Inglés, los Ballets de París, creados por Roland Petit, y los Ballets del London's Festival Ballet y el del teatro Bolshoi de Moscú.

Aunque fue Edison quien primero tuvo una idea de lo que eran las fotografías en movimiento creando un artilugio que llamó cinematógrafo, que es en lo que se basan las modernas cámaras tomavistas, fueron los hermanos Lumière quienes construyeron un aparato con el que tomaban las fotos a una velocidad de 16 fotos por segundo y las proyectaban después. Las películas eran cortas y eran de fiestas en distintos lugares, desfiles y algunos combates de boxeo, saliéndoles muchos imitadores.

Fue un francés, Melies, quien por casualidad y al atascársele el aparato con que filmaba y volver a ponerlo en marcha, vio al revelar la película que donde había un hombre estaba una mujer, y donde un autobús, un coche fúnebre. Este fue el primer truco de cine, el "paso de manivela", pues entonces se movían los tomavistas con manivela. Luego descubrió numerosos trucos que todavía se emplean destacando su película "Viaje a la Luna", siguiéndole otras muchas en las

Continúa en la pág. siguiente.

CAMPO DE EXISTENCIA

Hay funciones en las que no todo valor de x tiene imagen $f(x) = y$ en el campo de los números reales. Denominaremos campo de existencia de una función al tramo del eje de abscisas OX para cuyos valores existe imagen.

Ej.: Sea la función $y = \sqrt{x}$. Si damos a "x" valores negativos no encontramos solución en el campo de los números reales; es necesario, por tanto, que la "x" tome valores positivos. El campo de existencia de la función, en este caso es:

$$0 \leqslant x \leqslant \infty$$

5.–INTERSECCION DE DOS FUNCIONES. ESTUDIO ANALITICO Y GRAFICO

El problema de la intersección de dos funciones se resuelve analíticamente de la misma forma en que se soluciona un sistema de ecuaciones. Estas soluciones serán los puntos de corte de las dos funciones.

Respecto al estudio gráfico basta con representar sobre los ejes de coordenadas las dos funciones de forma individual y ver los puntos de corte que presentan entre sí.

Estudiemos algunos casos:

Ej.: Sean las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & y = 2x - 3 \\ \text{b)} & y = -x + 6 \end{array}\right\}$$

Empleando el método de igualación tendremos

$$2x - 3 = -x + 6$$

Agrupando las x en el primer miembro y los números en el segundo:

$$2x + x = 6 + 3$$

$$3x = 9$$

Despejando

$$x = \frac{9}{3} \qquad \boxed{x = 3}$$

$$y = -3 + 6 = 3 \qquad \boxed{y = 3}$$

(3,3) serán las coordenadas del punto de corte de las dos funciones.

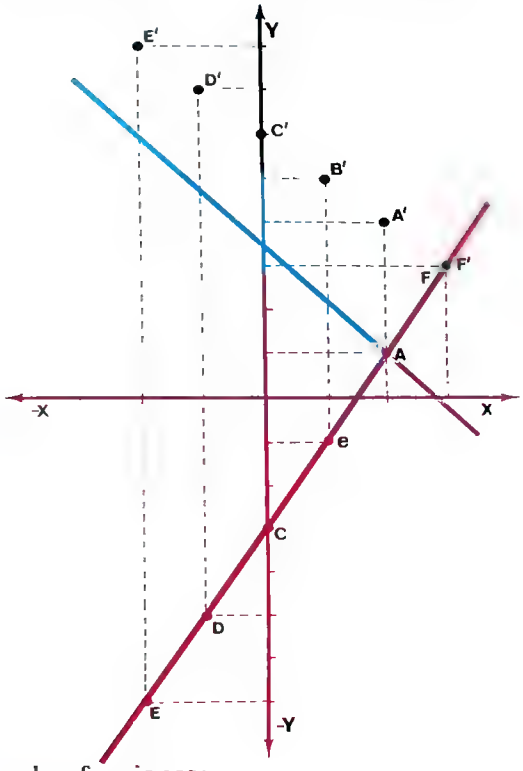
Realizamos las dos tablas de valores:

a)

	A	B	C	D	E	F
x	2	1	0	−1	−2	3
y	1	−1	−3	−5	−7	3

b)

	A′	B′	C′	D′	E′	F′
x	2	1	0	−1	−2	3
y	4	5	6	7	8	3



Ej.: Sean las funciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & y = 2x^2 \\ \text{b)} & y = x + 1 \end{array}\right\}$$

Solucionando el sistema por igualación tenemos:

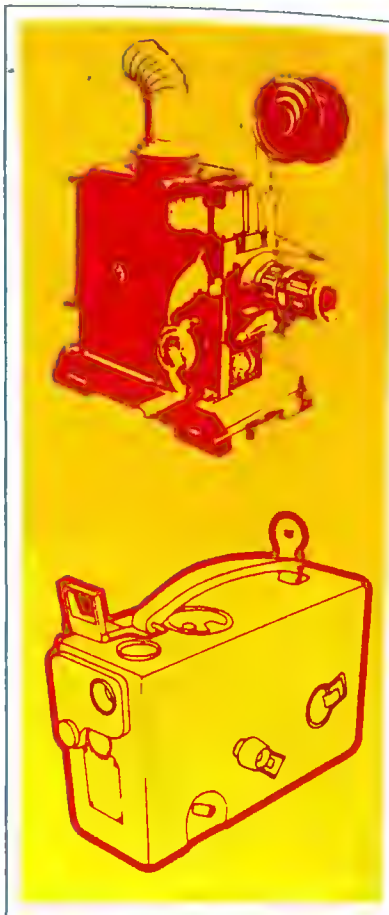
$$2x^2 = x + 1$$

Pasamos todo al primer miembro:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Solucionamos la ecuación aplicando la fórmula:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$



que destacaban su maestría para los trucos y su magia cinematográfica. De la fantasía de Melies se pasó al realismo de otros directores, tanto en Inglaterra como en Francia.

La más importante película fue de Estados Unidos y se llamó "Asalto y robo de un tren" que se considera como la primera película del Oeste y realizada por S. Porter.

En estas nuevas películas los espectadores podían ver distintas escenas, que figuraba estaban sucediendo al mismo tiempo y los detalles importantes los veían más de cerca, el llamado "primer plano". Esto no se podía conseguir en el teatro, con lo que el cine empezó a ser más popular y se le consideró como "El séptimo arte".

SOLUCION AL PROBLEMA DEL MULTIPLO DE 37 (pág. 660)

No sólo existe un número, sino infinitos; veamos por ejemplo:

$$999 : 37 = 27$$
$$999.999 : 37 = 27027$$
$$999.999.999 : 37 = 27027027$$

Bonito, ¿no?

SOLUCION AL PROBLEMA DE ATENCION (pág. 663)

Decimos al final del problema ...al salir por la puerta y no llevar bien la cuenta **muere.**

Nada más fácil: que sea **paracaidista.**

$$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \qquad x_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Si $\boxed{x_1 = 1 \quad y_1 = 1 + 1 = 2}$

Si $\boxed{x_2 = -\frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}}$

(1, 2) y (−1/2, 1/2) serán los dos puntos de corte de las funciones.

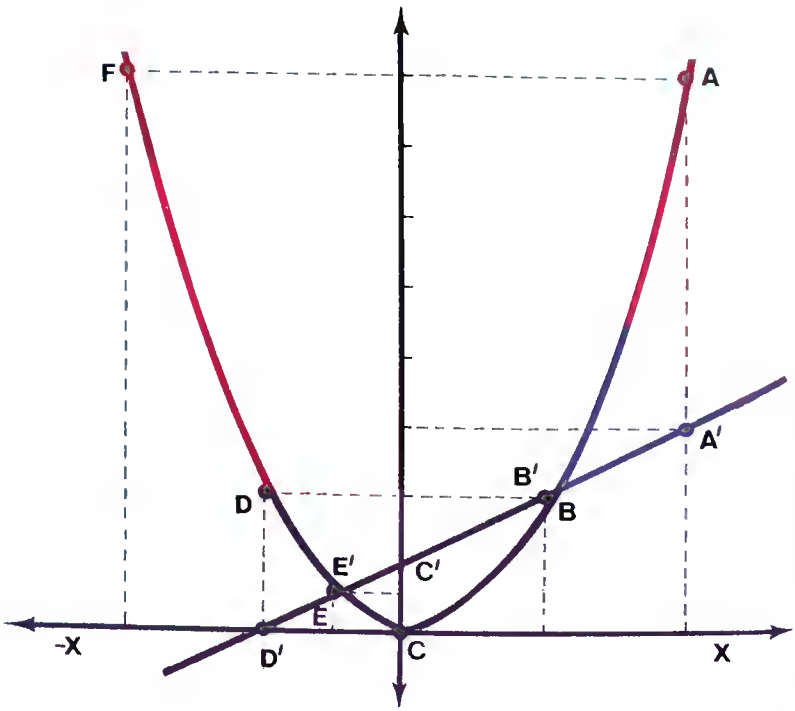
Realizamos las dos tablas de valores:

a)

	A	B	C	D	E	F
x	2	1	0	−1	−1/2	−2
y	8	2	0	2	1/2	8

b)

	A′	B′	C′	D′	E′
x	2	1	0	−1	−1/2
y	3	2	1	0	1/2



Ejemplo: Sean las funciones.

$$a) \quad y = 2x^2 + 3x - 1$$

$$b) \quad y = 2x^2 - x + 3$$

Las solucionamos como las anteriores y tenemos:

$$2x^2 + 3x - 1 = 2x^2 - x + 3$$

Agrupamos las x en un miembro y los números en el otro:

$$\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 3x + x = 3 + 1$$

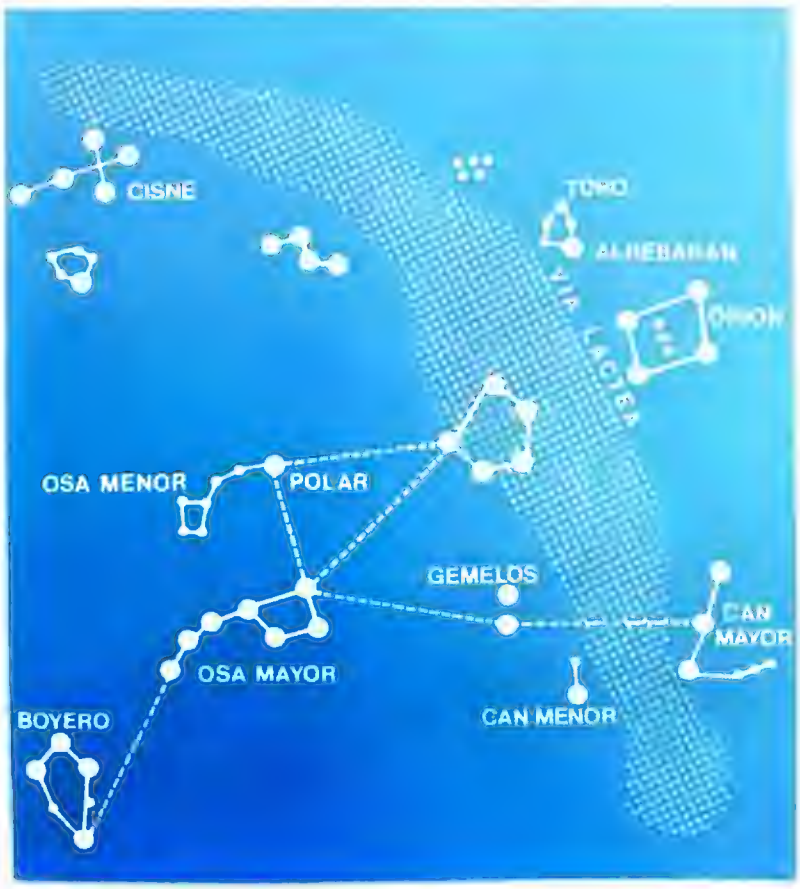
$$4x = 4$$

Despejando $\quad x = \frac{4}{4} \quad ; \quad x = 1$

Como $x = 1$ sustituyendo este valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos el valor de y.

$$y = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 4$$

(1, 4) será el punto de corte de las dos funciones.



LOCALIZACION DE ASTROS

La mejor manera de localizar un astro es por el método más antiguo que existe, y mientras nadie demuestre lo contrario: las constelaciones.

Teniendo estos puntos de referencia es fácil conocer la situación de las estrellas y planetas más brillantes. Indicamos los cuerpos más brillantes, en principio, porque además de ser más fáciles de encontrar nos va llenando de experiencias para cuando seamos algo más veteranos. Veremos, y esto os lo garantizo, que iremos en busca de los cuerpos celestes opacos o semiopacos.

Construiréis vuestras cartas celestes y sólo por ellas os guiaréis. Aquí os ponemos para orientación el dibujo de una carta celeste, que os ayudará y servirá para iniciaros. Luego construiréis la vuestra propia, que os parecerá más perfecta que ninguna; ello es debido a que habéis construido la carta a vuestra conveniencia y utilización, y tendréis el orgullo de su construcción.

Todo esto que os hemos indicado anteriormente fue una vivencia que tuvimos 57 alumnos, y el profesor de astronomía nos sacó de dudas diciéndonos lo que anteriormente hemos expuesto.

Era antigua costumbre griega bailar en las ceremonias religiosas alrededor del altar de algún dios. Su baile, muy distinto al nuestro, era una especie de procesión muy animada, una especie de pantomima; daban vueltas los grupos de jóvenes adoptando posiciones nobles y expresivas, pues los antiguos danzaban con todo el cuerpo. Esta danza religiosa iba siempre acompañada por cantos en honor del dios. La banda que cantaba y bailaba al mismo tiempo era el coro. Todas las ciudades poseían grupos entrenados para celebrar las fiestas, y en ellos figuraban después de largo estudio y preparación los hijos de las familias más ilustres; se quería que los ejecutantes fuesen dignos del dios. Uno de los dioses más celebrado era Dionisio, dios de las vendimias, y en su homenaje se celebraba una danza grave y seria que representaba los actos y las hazañas del dios. El jefe del coro hacía el papel de Dionisio y los demás danzaban a su alrededor.

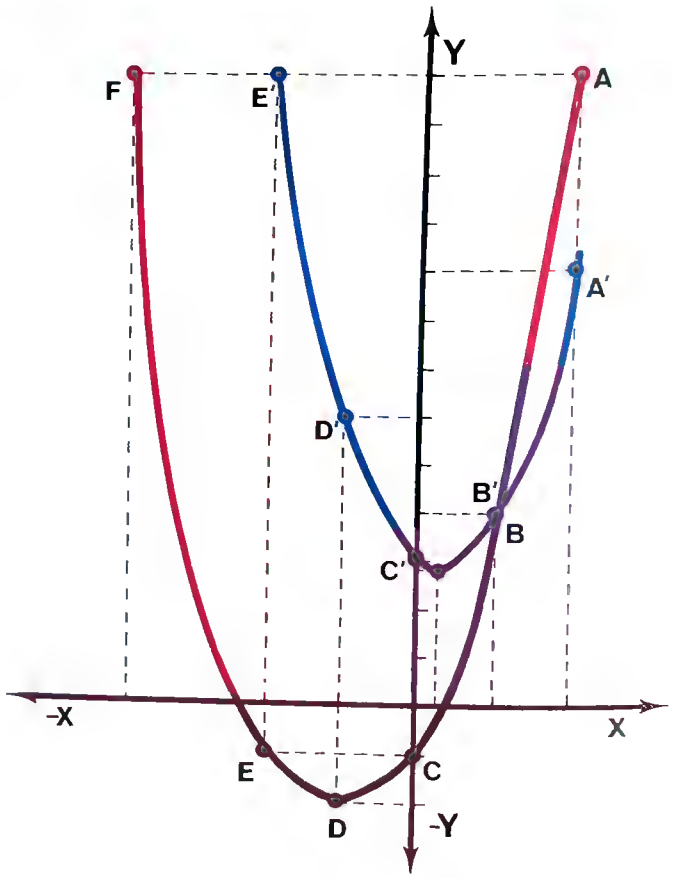
Realizamos las tablas:

a)

	A	B	C	D	E	F
x	2	1	0	−1	−2	−4
y	13	4	−1	−2	−1	13

b)

	A′	B′	C′	D′	E′	F′
x	2	1	0	−1	−2	0,25
y	9	4	3	6	13	2,75



Ej.: Sea el sistema el formado por la función $y = 3x + 2$ y "su inversa".

Lo primero que tenemos que hacer es calcular su inversa para lo cual despejamos "x" y tendremos:

$$3x = y - 2$$

$$x = \frac{y - 2}{3}$$

Donde pone "x" ponemos "y" y donde pone "y" ponemos "x" y de esta manera tendremos ya la función inversa:

$$y = \frac{x - 2}{3}$$

Luego el sistema estará formado por las funciones:

$$\left.\begin{array}{l} a)\quad y = 3x + 2 \\ b)\quad y = \dfrac{x - 2}{3} \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos por igualación; al ser iguales los primeros miembros sólo tenemos que igualar los segundos.

$$3x + 2 = \frac{x - 2}{3}$$

Quitamos el 3 y lo pasamos multiplicando:

$$3\,(3x + 2) = x - 2$$

Quitamos paréntesis:

$$9x + 6 = x - 2$$

Agrupamos las x en un miembro y los términos sin x en el otro:

$$9x - x = -2 - 6$$

$$8x = -8$$

Despejando:

$$x = -\frac{8}{8} \quad , \quad x = -1$$

$$\text{Si } x = -1 \qquad y = 3\,(-1) + 2 = -1$$

$(-1, -1)$ es el punto de corte de las dos funciones.

Al principio de su existencia, el violín se usó en acompañamiento de bailes y otros espectáculos.

La lira y el rabel fueron sus precursores, de los que cogió distintos aspectos, como la forma y el arco.

Tiene el violín en su estructura más de 70 piezas de madera, lo que le convierte en casi una obra maestra.

Con Monteverdi, que lo pone como guía de su orquesta, ve incrementada notablemente su importancia.

Los maestros artesanos Amati, Guarneri, y, por encima de todos, Stradivarius, en el siglo XVII, van reformando algunas de las piezas del violín, como el mango, el puente y la barra, dándole mayor potencia y calidad.

Paganini, en el siglo XIX, crea e interpreta unas partituras tan floreadas y difíciles de interpretar que da a este instrumento una importancia inusitada, destacando este intérprete sobre todos los demás, siendo el asombro de su época, de tal modo que decían que estaba aliado con el diablo.

Tiene el violín, como todos los instrumentos de arco, la facultad de prolongar el sonido sin que se debilite, puede también cambiar la fuerza o intensidad del sonido y conseguir gran variedad de matices. Con la "sordina", que es como un peine de tres púas que se pone sobre el puente, se consiguen eliminar las vibraciones y apagar el sonido. Son famosos por el virtuosismo de sus interpretaciones los "Veinticuatro Violines del rey Luis XIV".

El estadounidense Tomás Alba Edison consiguió el registro de sonidos sobre un cilindro de estaño, siendo el precursor del disco plano, que fue creado 20 años después por el también estadounidense Emil Berliner.

Se regía por un sistema muy laborioso, pues se grababa químicamente sobre un disco de cinc. Posteriormente, creó un sistema de prensa sobre una base de ebonita y así se podían hacer más copias. Luego, al notar que la ebonita era difícil de prensar se sustituyó por un compuesto de baquelita, método que se usó hasta 1948, año en que Peter Goldmark creó los microsurcos de resina vinílica.

Desde la invención del disco hasta la cuadrafonía actual las técnicas fonográficas han evolucionado grandemente. Antiguamente, la velocidad en revoluciones por minuto (rpm) de un disco era de 78, siendo ahora de 45 y 33 1/3 rpm. Vemos, por lo tanto, que un disco dura según su velocidad de rotación y su diámetro (que suele ser de 30, 25 ó 17 cm).

Se utilizan tres métodos de grabación en los discos: mono, estéreo y cuadrafónico, según existan uno, dos o cuatro los registros que se hagan sobre el mismo surco. La cuadrafonía es la más laboriosa, ya que los cuatro registros hay que hacerlos con la codificación de dos grabaciones distintas en un mismo surco.

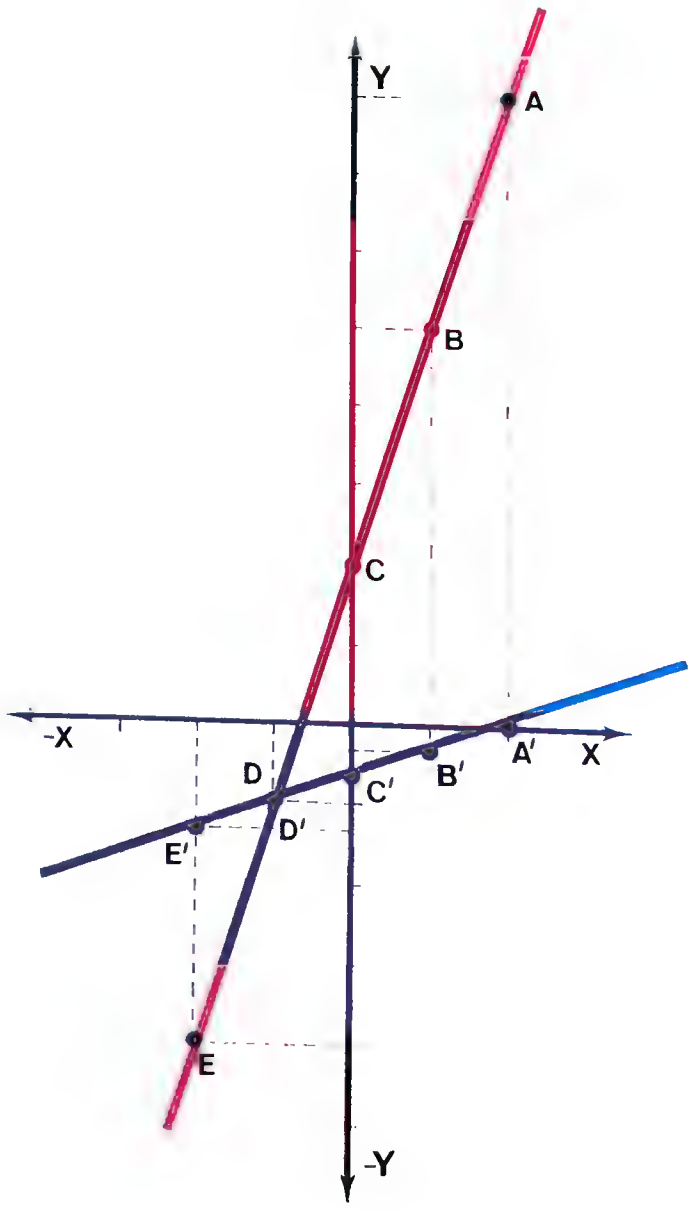
Realizamos las tablas:

a)

	A	B	C	D	E
x	2	1	0	−1	−2
y	8	5	2	−1	−4

b)

	A′	B′	C′	D′	E′
x	2	1	0	−1	−2
y	0	−1/3	−2/3	−1	−4/3



6.–EJERCICIOS PROPUESTOS. SOLUCIONES

Ejercicio 1

Dada la función $y = f(x) = 3x + 5$, calcular:

1.1 $f(5)$ 1.3 $f(1/2)$

1.2 $f(-5)$ 1.4 $f(-1/2)$

SOLUCION

1.1

Para $x = 5 \rightarrow y = f(5) = 3 \cdot 5 + 5 = 20$

$$y = f(5) = 20$$

1.2

Para $x = -5 \rightarrow y = f(-5) = 3 \cdot (-5) + 5 = -10$

$$y = f(-5) = -10$$

1.3

Para $x = \frac{1}{2} \rightarrow y = f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = \frac{13}{2}$

$$y = f(\frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$$

1.4

Para $x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = f(-\frac{1}{2}) = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 5 = \frac{7}{2}$

$$y = f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$$

Ejercicio 2

Dada la función $y = f(x) = \frac{5x + 2}{3x - 1}$, calcular:

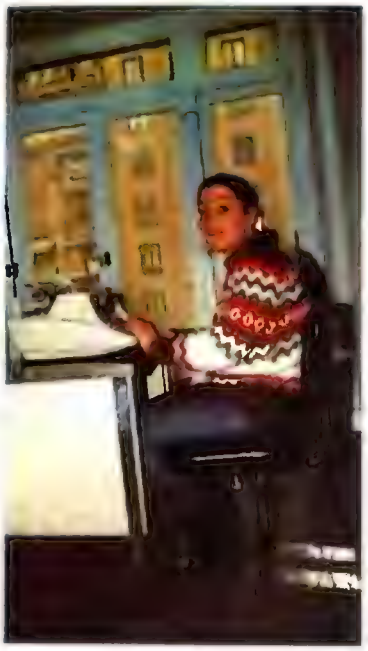
2.1 $f(-3)$ 2.3 $f(-2)$

2.2 $f(2)$ 2.4 $f(\frac{2}{5})$

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS"

Nuestro sistema de mínima dificultad creciente en la exposición de contenidos, proporciona al alumno un gran esfuerzo psicológico, ya que la dificultad mínima de contenidos fácilmente superable y asumible conduce al estudiante a cosechar éxito tras éxito superando estas dificultades.

Bernebé Tierno



Lola y José se van a poner a escribir a máquina una serie de folios. Lola me dice que ella sola tardaría en escribir los folios dos horas, pero que José tardaría tres horas, ya que es más lento.

Pienso entonces distribuir el trabajo entre los dos y quiero además indicarles cuánto tiempo tardarán en realizar el trabajo. ¿Cómo procederé?

La solución en pág. 720.

SOLUCION

2.1

Para $x = -3 \rightarrow y = f(-3) =$

$$= \frac{5 \cdot (-3) + 2}{3(-3) - 1} = \frac{-15 + 2}{-9 - 1} = \frac{-13}{-10} = \frac{13}{10}$$

$$y = f(-3) = \frac{13}{10}$$

2.2

Para $x = 2 \rightarrow y = f(2) = \frac{5 \cdot 2 + 2}{3 \cdot 2 - 1} = \frac{10 + 2}{6 - 1} = \frac{12}{5}$

$$y = f(2) = \frac{12}{5}$$

2.3

Para $x = -2 \rightarrow y = f(-2) =$

$$= \frac{5(-2) + 2}{3(-2) - 1} = \frac{-10 + 2}{-6 - 1} = \frac{-8}{-7} = \frac{8}{7}$$

$$y = f(-2) = \frac{8}{7}$$

2.4

Para $x = \frac{2}{5} \rightarrow y = f(2/5) =$

$$= \frac{5 \cdot 2/5 + 2}{3 \cdot 2/5 - 1} = \frac{2 + 2}{\frac{6}{5} - 1} = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 20$$

$$y = f(2/5) = 20$$

Ejercicio 3

Dada la función $y = f(x) = \frac{2x + 6}{x - 3}$, calcular el valor de x, cuando $y = 6$.

SOLUCION

Para $y = f(x) = 6 \rightarrow 6 = \dfrac{2x + 6}{x - 3}$

- Quitando denominadores, queda:

$$6\,(x - 3) = 2x + 6$$

- Operamos:

$$6x - 18 = 2x + 6$$

- Agrupamos términos:

$$6x - 2x = 18 + 6$$

$$4x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{4} = 6$$

- Por tanto, cuando $y = 6 \rightarrow$ $x = 6$

Ejercicio 4

Dada la función $y = f(x) = x + \dfrac{1}{4}$, calcular el valor de x, cuando y vale 5.

SOLUCION

Para $y = f(x) = 5 \rightarrow 5 = x + \dfrac{1}{4}$

Operando, tenemos:

$$5 - \frac{1}{4} = x \rightarrow \frac{20 - 1}{4} = x$$

$$x = \frac{19}{4}$$

Por tanto, cuando $y = 5 \rightarrow$ $x = \dfrac{19}{4}$

Ejercicio 5

Calificar las siguientes funciones:

5.1 $y = \sqrt{\dfrac{3x + 5}{2x - 1}}$

5.2 $y = \log 5x$

5.3 $3y - 4x = x^2 + 7$

5.4 $y = \text{tag}\,(3x - 5)$

MATEMATICAS EN ASIRIA Y BABILONIA

La herencia que encontramos respecto a esta ciencia se remonta a escrituras cuneiformes en tablillas de barro cocido, remontándose al año 2000 antes de J.C.

No sólo dominaron la Aritmética y el Algebra, sino que también llegaron a dominar la Geometría, y realizaron asombrosos cálculos de Astronomía.

Consiguieron la resolución de ecuaciones de segundo grado e incluso las de tercer grado, dejando estas últimas en desuso por su carácter poco práctico (¡qué pena!).

Asirios y babilónicos emplearon en la numeración el sistema **decimal**. Al realizar tan precisos cálculos astronómicos que les llevaron a usar también, y para esta ciencia, el sistema de numeración de base 60 (lo cual demuestra unos amplios conocimientos de la Geometría). Determinaron fechas de eclipses, que en su época parecía imposible.

Isis es una de las más importantes divinidades de la antigua civilización egipcia; está considerada como la representación de la fidelidad y el amor conyugal hasta después de la muerte, protegiendo e las madres y a sus hijos y, por consiguiente, se la considera como la madre protectora de la familia.

Dice la leyenda que Isis recogió el cadáver de su esposo Osiris cuando fue asesinado, y con ayuda de otros dioses le devolvió la vida. El dios Osiris partió al más allá y su esposa tuvo un hijo, al que llamó Horus, y reinaría en lugar de su padre. Se suele ver la figura de Isis representada como una mujer amamantando a un niño, o en forma de vaca, o mujer con cabeza de vaca.

Tuvo templos dedicados a su culto casi siempre en unión de Osiris, no solamente en Egipto, sino por todo el Mediterráneo, sobre todo en Grecia y Roma. Había sacerdotes encargados de vestir a la diosa, de dirigir las procesiones y otros que hacían profecías.

El culto se hacía con una celebración de apertura y cierre del templo con grandes fiestas para el pueblo y la procesión que se hacía en primavera, llevando a la diosa por mar y lanzada al mismo y la representación del dolor de Isis al ver el cadáver de Osiris.

SOLUCION

5.1

La función $y = \sqrt{\dfrac{3x + 5}{2x - 1}}$, es explícita, analítica, de tipo algebraico y, dentro de ellas, irracional.

5.2

La función $y = \log 5x$ es explícita, analítica, trascendente y, dentro de éstas, será logarítmica.

5.3

La función $3y - 4x = x^2 + 7$ es implícita, analítica, algebraica, racional y entera de 2.° grado.

5.4

La función $y = \text{tag}\,(3x - 5)$ es explícita, analítica, trascendente y, dentro de éstas, será trigonométrica.

Ejercicio 6

Calcular las inversas de las funciones siguientes:

6.1 $y = f(x) = \dfrac{5x + 2}{3x + 1}$

6.2 $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{2}$

6.3 $y = f(x) = 5 + \sqrt{x}$

6.4 $y = f(x) = 5 - \sqrt{x^3}$

6.5 $y = f(x) = ax + b$

6.6 $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx}$

SOLUCION

6.1

$$y = f(x) = \frac{5x + 2}{3x + 1}$$

- Quitamos denominadores:

$$y\,(3x + 1) = 5x + 2$$

- Eliminamos paréntesis:

$$3xy + y = 5x + 2$$

- Agrupamos los términos que poseen x en un lado y los otros términos en el otro lado:

$$3xy - 5x = 2 - y$$

- Sacamos "x" factor común:

$$x\,(3y - 5) = 2 - y$$

- Despejamos "x":

$$x = \frac{2 - y}{3y - 5}$$

- Sustituimos "x" por "y" y viceversa, obteniendo la función inversa:

$$f^{-1}(x) = y = \frac{2 - x}{3x - 5}$$

Así, pues:

$$f(x) = \frac{5x + 2}{3x + 1} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{2 - x}{3x - 5}}$$

6.2

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{2}$$

- Quitamos denominadores:

$$2y = \sqrt{x + 2}$$

- Eliminamos raíces, elevamos los 2 miembros de la igualdad al índice de la raíz, quedando:

$$(2y)^2 = (\sqrt{x + 2})^2$$

$$4y^2 = x + 2$$

- Despejamos "x":

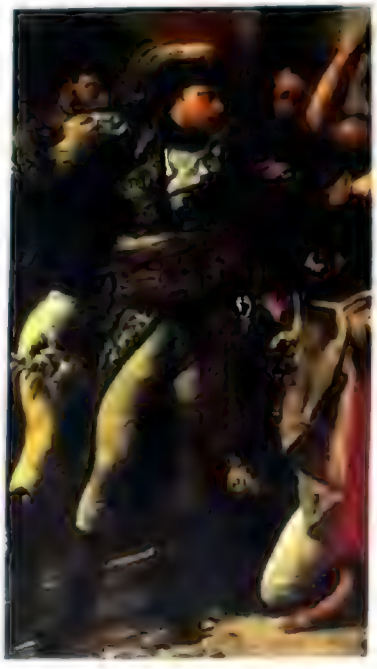
$$4y^2 - 2 = x$$

- Sustituimos "x" por "y" y viceversa, obteniendo la función inversa.

$$f^{-1}(x) = y = 4x^2 - 2$$

Así, pues:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{2} \rightarrow \quad f^{-1}(x) = 4x^2 - 2$$



CODIGO DE NAPOLEON

Llamado así por haber sido realizado no sólo a instancias de Napoleón I, sino con su intervención personal. Tuvo tal valor técnico y social en el mundo del derecho que hasta incluso hoy inspira algunas leyes. Bélgica, Holanda, Luxemburgo, Bolivie, República Dominicana y España siguen su doctrina. Este código tiene una flexibilidad inusitada, ya que las organizaciones interpretativas de los tribunales las han ido acomodando a las nuevas necesidades generales de cada nación. Cada uno de estos países los han ido adecuando a su formato nacional de ley. Códigos como el francés y el alemán han influenciado más o menos a las legislaciones civiles extranjeras.

Paraguay en 1876 adoptó el código civil argentino en bloque, pero estas adopciones no son recomendables, ya que los sistemas jurídicos son demasiado distantes, tanto en pueblo como en cultura, al no existir elementos comunes que faciliten la asimilación.

Este caso lo ponemos como un hecho curioso por su origen y fecha, ya que siempre los gobiernos de cada nación son los destinados a adecuarlos convenientemente, renovándolos, acomodándolos y actualizándolos.

El explorador ruso A. Chrenk dio hace más de cien años el calificativo de "paleoasiáticos" a una serie de lenguas Siberianas que no tenían lazo de unión ni relación con ninguna otra lengua. Estas lenguas eran: el esquimal de Siberia, el aleutiano, el ostiak, el chuckcha, etc. Varios lingüistas, en fecha reciente, han encontrado que alguno de ellos ha tenido origen en el urálico. A estas lenguas se las ha clasificado en varios grupos para buscar relación de unos con otros, pero por mucho que se ha intentado se ha llegado solamente a relaciones convencionales. Unicamente las lenguas chuckcha y la guiliak son las que guardan mayores relaciones, pero también puede ser debido a que dada la proximidad se vayan emparentando y al cabo de los años se vea una remota semejanza.

6.3

$$y = f(x) = 5 + \sqrt{x}$$

$$y - 5 = \sqrt{x}$$

- Eliminamos raíces, elevando los dos miembros de la igualdad al índice de la raíz, quedando:

$$(y - 5)^2 = x$$

- Quitando paréntesis:

$$y^2 - 10y + 25 = x$$

- Sustituimos "x" por "y" y viceversa, obteniendo la función inversa:

$$f^{-1}(x) = y = x^2 - 10x + 25$$

Así, pues:

$$f(x) = 5 + \sqrt{x} \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 10x + 25$$

6.4

$$y = f(x) = 5 + \sqrt{x^3}$$

$$y - 5 = + \sqrt{x^3}$$

- Eliminamos raíces, elevando los dos miembros de la igualdad al índice de la raíz, quedando:

$$(y - 5)^2 = (\sqrt{x^3})^2$$

$$(y - 5)^2 = x^3$$

- Quitando paréntesis:

$$y^2 - 10y + 25 = x^3$$

- Sustituimos "x" por "y" y viceversa, obteniendo la función inversa:

$$x^2 - 10x + 25 = y^3$$

Despejando "y", tenemos $y = \sqrt[3]{x^2 - 10x + 25}$

Así, pues:

$$f(x) = 5 + \sqrt{x^3} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 10x + 25}$$

6.5

$$y = f(x) = ax + b$$

- Agrupando términos:

$$y - b = ax$$

- Despejando "x":

$$x = \frac{y - b}{a}$$

- Sustituimos "x" por "y" y viceversa, obteniendo la función inversa:

$$y = \frac{x - b}{a}$$

Así, pues:

$$f(x) = ax + b \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}}$$

6.6

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx}$$

- Quitamos denominadores:

$$y\,(cx) = ax + b$$

- Eliminamos paréntesis:

$$ycx = ax + b$$

- Agrupamos términos en x:

$$ycx - ax = b$$

- Sacamos factor común a la "x":

$$x\,(yc - a) = b$$

- Despejamos "x":

$$x = \frac{b}{yc - a}$$

- Sustituimos "x" por "y" y viceversa, obteniendo la función inversa:

$$y = \frac{b}{cx - a}$$

El galeón (de galei, galera) es una embarcación a vela que nació en la Edad Media y se destinaba especialmente para cargamento. Con el paso del tiempo, viendo los marineros qué eran estas naves, se fueron construyendo grandes y poderosas. Aunque parecidos a las galeras, los galeones eran más cortos de eslora (longitud) y bastante más veloces.

Tres palos con velas cuadradas era la propulsión de estas naves, que llegaban a desplazar hasta mil toneladas.

Sobre la primera cubierta o sobre la cubierta superior estaba ubicada su defensa (30 cañones).

Estos galeones se emplearon principalmente para el envío de oro y plata de Méjico y Perú a España.

Se formaban grandes convoyes de hasta treinta o cuarenta galeones (en ruta hacia España) para resistir y hacer frente a los ataques piratas.

El primer vestigio de la existencia del Océano Pacífico se debe a Américo Vespucio. Fue descubierto este océano en el siglo XVI por navegantes españoles y portugueses buscando una ruta occidental hacia las Indias.

La expedición de Magallanes que cruzó el estrecho que lleva su nombre en 1520 nos dio una primera idea de su importancia.

El gran descubridor Urdaneta fue el que explorando el Océano Pacífico descubrió nuevas rutas cómodas y más asequibles para la navegación. Cuando estas rutas estaban señaladas, Carlos V renunció a los derechos españoles sobre las Islas Molucas.

Como dichas rutas sólo las conocían los españoles (sobre todo por la ruta de poniente), se nos permitió inaugurar el galeón de Manila, que durante dos siglos fue la única línea regular que cruzó el Pacífico.

Así, pues:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{b}{cx-a}}$$

Ejercicio 7

Representar las siguientes funciones:

7.1 $y+2x=4$

7.2 $y-2x=4$

7.3 $y=\frac{1}{5}x^2+2$

7.4 $y=-\frac{1}{5}x^2$

7.5 $y=5x^2+5x-10$

7.6 $y=-\frac{1}{5}x^3$

SOLUCION

7.1

$$y + 2x = 4$$

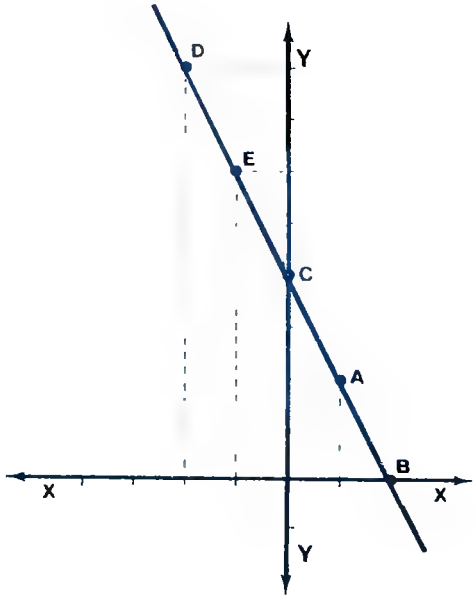
- La pasamos a forma explícita:

$$y = 4 - 2x$$

- Realizamos la tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−2	−1
y	2	0	4	8	6

- Representamos



7.2

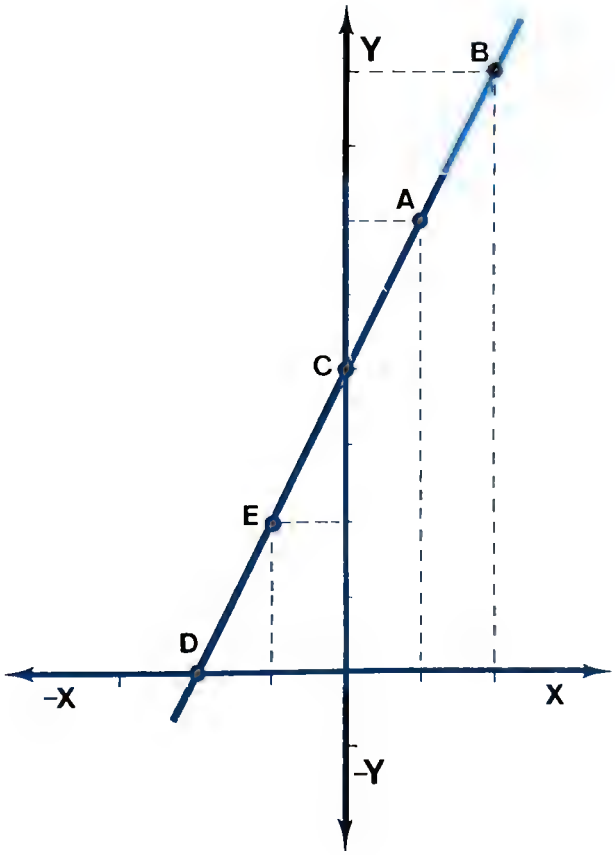
$$y - 2x = 4$$

- La pasamos a forma explícita, quedando:

$$y = 2x + 4$$

- Realizamos la tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−2	−1
y	6	8	4	0	2



Las joyas, desde la antigüedad, fueron consideradas como señal de poder y adorno entre hombres y mujeres; otras veces se tenían como amuletos, cosa que en la actualidad, sobre todo en tribus poco civilizadas, se siguen considerando.

Los egipcios crearon joyas extraordinarias de metal, casi siempre de oro.

Las joyas se perfeccionaron en Grecia, creando toda clase de pendientes, brazaletes y collares. Destaca el célebre tesoro de Otreo en la ciudad de Micenas.

Entre los romanos, grandes maestros en el engarce de pedrería, el anillo servía como muestra de autoridad y jerarquía.

Los esmaltes bizantinos destacan en hebillas, mangos de espada y coronas.

Hasta el siglo XIII, y con los franceses, no destaca el cincelado, que se perfecciona en el renacimiento.

Las piedras preciosas se empiezan a tallar a finales del siglo XVI, destacando la talla del italiano Jacometrezzo. El gran diamante "estanque" y la perla "peregrina" son las joyas más importantes de la época.

7.3

$$y = \frac{1}{5}x^2 + 2$$

- Al estar la función en forma explicita, pasamos directa-

La égloga, antiguamente, era el nombre que se daba a los poemas pequeños de idilios pastorales que escribían Teócrito y Virgilio. Era como un diálogo que cautiva los amores entre unos pastores, otras veces hablaban de la vida en el campo y describían bucólicos paisajes.

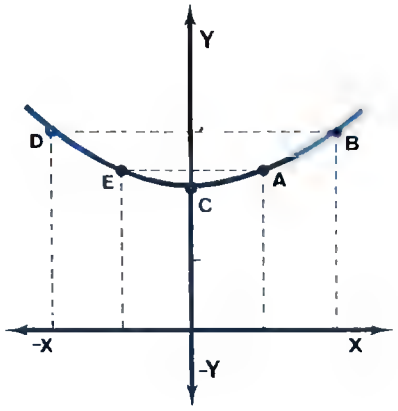
Juan del Encina y Lucas Fernández escribieron églogas en sus dramas en verso, con lo que sus personajes fueron considerados como símbolos y Garcilaso de la Vega los incorporó a su lírica, con lo que la égloga en el renacimiento consiguió ser considerada un verdadero género poético.

En el siglo XX la égloga se hace más virtuosista de la pluma de Luis Cernuda. Se hace más dinámica en los asuntos tratados con Batteux y con Hermosilla. La égloga se dramatiza y crea el Idilio como una muestra del sentir personal de quien la escribe.

mente a realizar la tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−2	−1
y	2,2	2,8	2	2,8	2,2

- Representamos



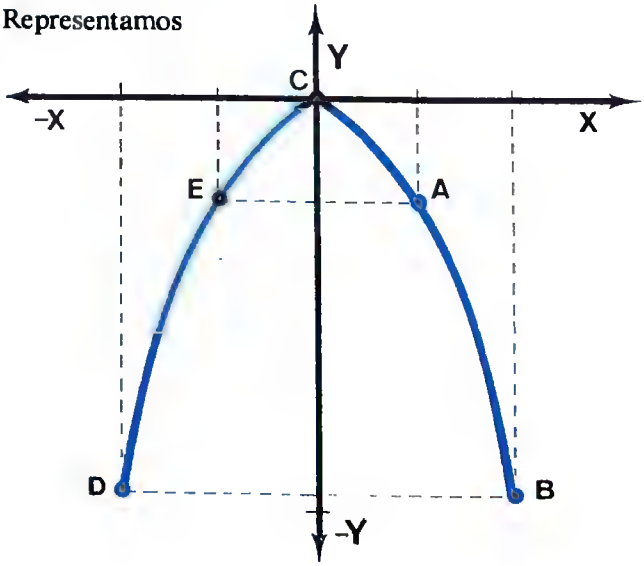
7.4

$$y = -\frac{1}{5}x^2$$

Como la función está en forma explícita, pasamos a realizar la tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−2	−1
y	−0,2	−0,8	0	−0,8	−0,2

- Representamos



$$y = 5x^2 + 5x - 10$$

Esta función vamos a ver si corta al eje de abscisas. Para ello o, mejor dicho, por ello $y = 0$, quedando una ecuación de 2.º grado.

$$0 = 5x^2 + 5x - 10$$

- Simplificamos, dividiendo los 2 miembros de la igualdad por 5:

$$\frac{0}{5} = \frac{5}{5}x^2 + \frac{5x}{5} - \frac{10}{5}$$

- Quedando

$$0 = x^2 + x - 2$$

- Despejamos "x":

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Así, pues, los puntos de corte con el eje x son:

A (1, 0) y B (−2, 0)

Alonso Cano, pintor y escultor granadino, que vivió de 1601 a 1667, al levantarse un día y disponerse a almorzar, su aprendiz y criado Gerónimo Cieza le dijo que no había nada y que ya nadie les quería fiar más.

Exasperó a Cano esta respuesta y febrilmente se dispuso a terminar un cuadro en el que estaba trabajando y destinado al convento de frailes cartujos, situado no lejos de Sevilla. Con rasgos vigorosos fue trabajando hasta darlo por terminado. Hizo que el aprendiz cargara con él y ambos se encaminaron al convento. Allí fueron amablemente recibidos por el prior, toda la comunidad y un fraile franciscano, amigo del prior y muy entendido en cosas de pintura.

Todos celebraron la belleza de la obra, que representaba a la Santisima Trinidad, todos menos el prior, quien en su deseo de que Cano rebajara el precio empezó a ponerle imaginarios defectos y faltas.

Cano, que sabía el valor de su obra, se dirigió al franciscano que estaba de visita y le dijo:

—¿Agrada mi obra a su paternidad?

—Me agrada tanto que la considero una de vuestras mejores obras, y si tuviera posibilidades para ello os encargaría una para mi convento.

—Pues no paséis pena por ello, yo os regalo este cuadro, ya que sabéis estimarlo y sólo os pido a cambio un plato de vuestro humilde guiso para este pobre aprendiz y para mí.

El cuadro se conoce aún hoy día por el "Cuadro de la chafaina".

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA CUERDA DE LA COMETA (pág. 678).

Vemos que la madre, el padre, el hermano y la hermana le habían tomado siempre la mitad de lo que tenía.

Si utilizamos los números es fácil saberlo:

la madre 1/2
el padre 1/2/2
el hermano 1/2/2/2
la hermana 1/2/2/2/2
y él 5 metros.

La fórmula sería, llamándole x a la cuerda primitiva:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+5\text{ m}=x$$

Más fácil es todavía sacarlo sin realizar ninguna operación y realizándolo todo al revés. Veamos: A él le quedan 5 metros de cuerda, su hermana le quitó otros 5 metros y la cuerda ya tendrá 10 m. El hermano le quitó otros 10 m. y la cuerda ya tendrá 20 m.

El padre le quitó otros 20 m. y la cuerda ya la tenemos con 40 m.

La madre le quitó otros 40 m. y la cuerda al principio ya tendría 80 m.

Con 80 m. sí se puede hacer una cometa. Con 5 m. de cuerda sólo le sirve al hijo para... pegarle al perro (si lo tiene) de rabia.

- Calculamos el eje de simetría:

$$\frac{1+(-2)}{2}=\frac{-1}{2}=-0{,}5$$

$$h=-0{,}5$$

- Vértice:

El valor de x, encontrado en el paso anterior se introduce en la función dada:

$$y=5x^2+5x-10$$

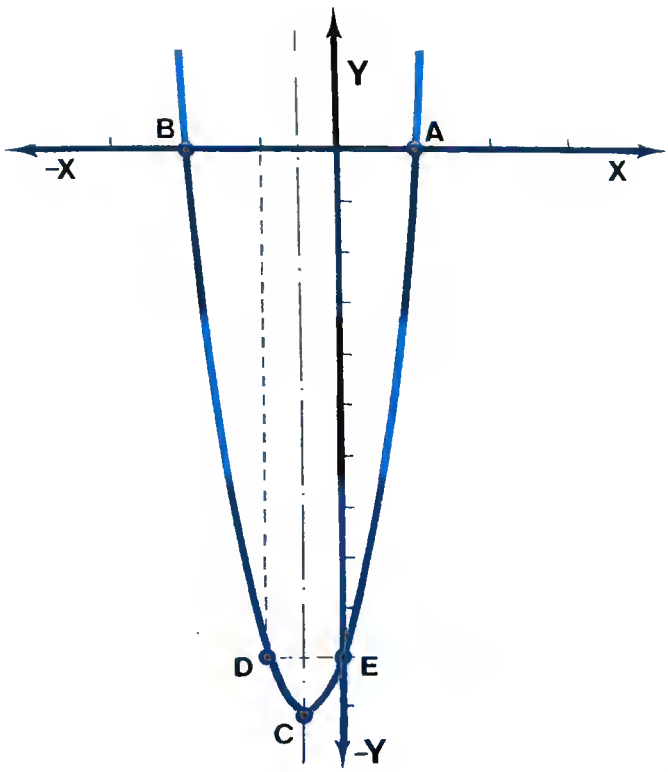
$$y=5\,(-0{,}5)^2+5\cdot(-0{,}5)-10$$

$$y=1{,}25-2{,}5-10\quad;\quad y=-11{,}25$$

Vértice $(-0{,}5;\ -11{,}25)$

- Tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	1	−2	−0,5	−1	0
y	0	0	−11,25	−10	−10



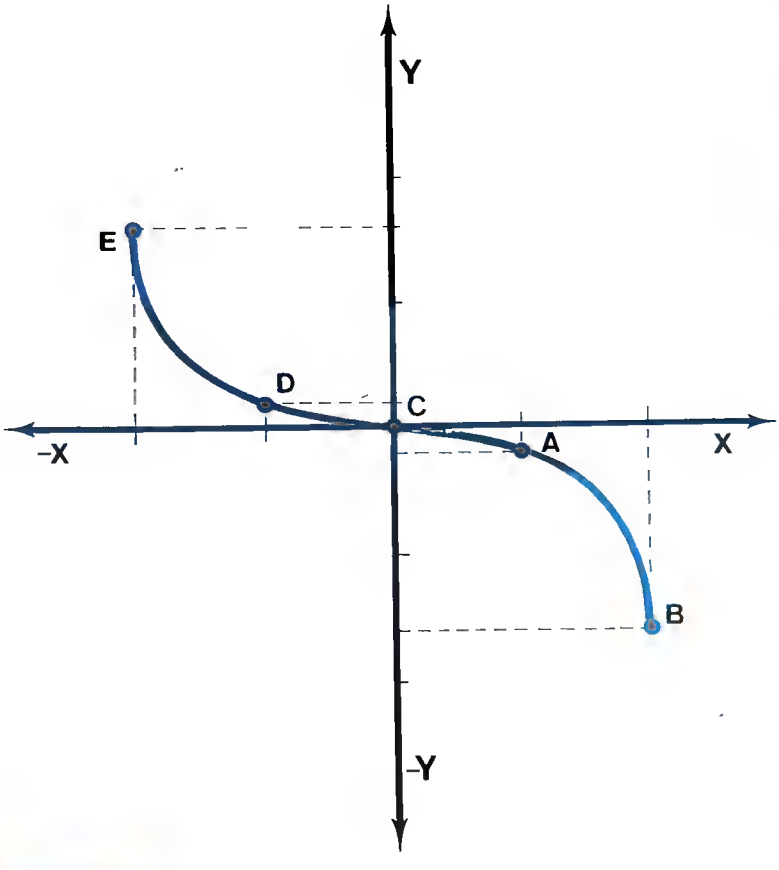
7.5

$$y = -\frac{1}{5}x^3$$

- Pasamos directamente a realizar la tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	1	2	0	−1	−2
y	−0,2	−1,6	0	0,2	1,6

- Representamos sobre el eje de coordenadas:



Ejercicio 3

Hallar los ceros de las siguientes funciones:

8.1 $\rho(x) = y = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 8}{4x - 10}$

8.2 $\rho(x) = y = \dfrac{3x^2 - 27}{3x + 15}$

8.3 $\rho(x) = y = 5x + 25$

MATEMATICAS PREHELENICAS

Este pueblo recogió o se influenció en las matemáticas de Egipto y en las de Babilonia.

El legado de dicha ciencia fue escrito en papiros, siendo el más antiguo el "Gran papiro de Moscú".

El año 2000 antes de J.C. fue en el que se inició el gran impulso de esta ciencia. Los cálculos matemáticos que usaron, más que otra cosa, eran cálculos prácticos, ya que se resumían mayormente a los tipos de pesas y medidas y a cálculos financieros que les servían para los intercambios y comercio de sus productos y para la medición de tierras.

En el "Gran papiro de Moscú" se nos demuestra el gran conocimiento que poseía este pueblo respecto a geometría plana y geometría del espacio, ya que en él está perfectamente desarrollado el estudio del **volumen de la esfera**, y (vamos a decir una curiosa tontería) si conocían tan bien el volumen de la esfera, ¿cómo dominarían la Geometría Plana?

En el siglo III los emperadores romanos hacían concesiones a sus soldados para pagarles sus servicios. A estas concesiones les llamaban "beneficia".

Entre los carolingios el beneficio fue hereditario, obligando al servicio militar; en cambio los asturleoneses no unían el beneficio al servicio de guerra y no era hereditario.

El beneficio se cambió por la "heredad" en el siglo XIII.

En Navarra y Aragón se reguló en el "Privilegio General" a partir del siglo XII que fuera hereditario.

A mediados del siglo XVIII distintos científicos explicaron la existencia del beneficio neto confundiéndolo con el interés, el salario o una renta.

E. H. Knight y otros economistas hicieron la teoría de la "incertidumbre" que se parece al "riesgo mercantil".

Ultimamente, y basándose en la idea de Schumpeter, el francés Perroux hizo una teoría del beneficio, estableciendo la diferencia entre el empresario rutinario y el empresario dinámico.

SOLUCIÓN

8.1

$$y = \frac{2x^3 - 6x^2 + 8}{4x - 10}$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2x^3 - 6x^2 + 8}{4x - 10}$$

- Quitando denominadores:

$$0 \cdot (4x - 10) = 2x^3 - 6x^2 + 8$$

$$0 = 2x^3 - 6x^2 + 8$$

- Reducimos, dividiendo ambos términos por 2:

$$\frac{0}{2} = \frac{2}{2}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{8}{2} \Rightarrow 0 = x^3 - 3x^2 + 4$$

- Por Ruffini, resolvemos la ecuación:

	1	−3	0	4	
2		2	−2	−4	
	1	−1	−2	0	$\rightarrow x = 2$

- Podemos seguir, bien mediante el método de Ruffini, bien por una ecuación de 2.º grado.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_3 = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por tanto, los ceros de la función son:

(2, 0) y (−1, 0)

8.2

$$y = \frac{3x^2 - 27}{3x + 15}$$

- Hacemos a $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3x^2 - 27}{3x + 15}$
- Quitamos denominadores:

$$0 \cdot (3x + 15) = 3x^2 - 27$$

$$0 = 3x^2 - 27$$

- Operamos:

$$3x^2 = 27$$

- Despejamos "x^2":

$$x^2 = \frac{27}{3} \quad ; \quad x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} \quad ; \quad x = \pm 3$$

Por tanto, los ceros de la función son:

(3, 0) y (−3, 0)

8.3

$$y = 5x + 25$$

- Hacemos a $y = 0 \Rightarrow 0 = 5x + 25.$
- Operamos:

$$5x = -25$$

- Despejamos "x":

$$x = \frac{-25}{5} \rightarrow x = -5$$

Por tanto, el cero de la función será:

(−5, 0)

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS".

De la acumulación de éxitos, superando problemas con una mínima dificultad creciente, el alumno llega a **"saborear" y gustar las matemáticas, y hasta encariñarse con ellas**, pues los pequeños éxitos acumulados le hacen sentirse importante y realizado.

Bernabé Tierno

El judaísmo o religión de los judíos fue fundado por Abraham, elegido por Dios para transmitirlo a sus descendientes. Como Dios dio a Jacob, nieto de Abraham, el nombre de Israel, de ahí viene el nombre de israelitas.

Fueron el pueblo que recibió las Tablas de la Ley de manos de Moisés, quien los guió a través del desierto a la tierra prometida. De sus reyes destacan David y Salomón.

Las leyes judaicas son escritas y orales; las primeras la constituyen la ley de Moisés y la biblia hebraica, y las otras, como la palabra lo dice, se transmiten oralmente.

Si el hombre peca, puede ser perdonado por sí mismo por el arrepentimiento y una conducta mejor. El alma la consideran inmortal y el Mesías no es Dios, sino un hombre bueno. Rechazan la adoración de ídolos y la inmoralidad.

Los días festivos del judaísmo son los sábados, la Pascua, Pentecostés, los Tabernáculos. El día de la Expiación está dedicado al ayuno y rezos. También existen otras fiestas menores y en todas ellas está prohibido el trabajo.

Existen tres oficios para el culto judaico: mañana, mediodía y tarde, y los días de fiesta, después de la mañana, sigue un oficio que lo complementa.

Ejercicio 2

Determinar analítica y gráficamente los puntos de intersección de las funciones

$$\text{F. 1:}\quad y - 5 = 3x^2 - 3$$

$$\text{F. 2:}\quad y = -x + 2$$

SOLUCION

La forma analítica se resuelve como cualquier sistema por el método que deseemos. Este ejercicio se va a resolver por el método de sustitución.

$$\left.\begin{aligned} y - 5 &= 3x^2 - 3 \\ y &= -x + 2 \end{aligned}\right\}$$ Sustituimos el valor de y de la 2.ª ecuación en la primera

- Nos queda:

$$-x + 2 - 5 = 3x^2 - 3$$

- Operamos:

- Pasamos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$3x^2 - 3 + x + 3 = 0$$

- El término 3 con el término −3 desaparece:

$$3x^2 + x = 0$$

- Quedando una ecuación incompleta de 2.º grado; así pues, sacamos factor común a "x":

$$x\,(3x + 1) = 0$$

- Para que se cumpla lo anterior, sólo hay 2 posibilidades:

a: que $x = 0$

b: que $3x + 1 = 0 \rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

- Cuando $x = 0$, sustituimos este valor en:

$$y = -x + 2; \quad y = -0 + 2; \quad y = 2$$

Cuando $x = -\frac{1}{3}$, sustituimos este valor en:

$$y = -x + 2; \quad y = -\left(-\frac{1}{3}\right) + 2; \quad y = \frac{1}{3} + 2, \quad y = \frac{7}{3}$$

Por lo que las dos funciones tratadas se cortan en 2 puntos, que son:

$$(0, 2) \text{ y } \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Puntos de corte

$(0, 2)$ y $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Una vez resuelto el problema analitico, pasamos a la resolución gráfica, dando una tabla de valores a los 2 gráficos y representando estos puntos en el eje de coordenadas.

En 1870 se inició en Francia una tendencia literaria conocida como el Naturalismo.

Figura capital de esta escuela fue Zola, que afirmaba que el novelista estaba obligado, además de observar la vida, a descubrir los mecanismos del corazón y de la inteligencia. Sus teorías influyeron en todos los escritores europeos.

En España la condesa doña Emilia Pardo Bazán puede considerarse representante de este movimiento, si bien con notable moderación, motivada por sus creencias católicas y su condición de aristócrata. Sus primeras novelas escritas a lo largo de la década de 1885 son las que más cerca se hallan del naturalismo. A este tiempo corresponde su obra más lograda "Los Pazos de Ulloa". El mérito de su producción novelística reside sobre todo en la expresión; su estilo es una feliz conjunción del lenguaje literario y del habla común del pueblo en la vida cotidiana.

Cultivó también la crítica literaria, la crónica; hizo meritorias traducciones; luchó en pro del naciente feminismo; fue catedrático de literaturas neolíticas en la Universidad de Madrid y Consejero de Instrucción Pública.

Su mayor prestigio lo consiguió como novelista y autora de cuentos.

Nacida en La Coruña en 1851, a los 25 años publicó un estudio crítico sobre el Padre Feijoo, que premiaron en un concurso. Posteriormente publicó una bella biografía de San Francisco de Asís, "Viaje de Novios", "La Cuestión Palpitante", "Los Pazos de Ulloa", y su segunda parte "La Madre Naturaleza". Sus obras maestras son "Insolación" y "Morriña", novelas cortas publicadas en 1889. Murió en Madrid en 1921.

OBSERVAR LA LUNA

La Luna, como astro más cercano a la Tierra, es el primer objeto que vamos a observar. Nada más ver nuestro satélite, sin ningún instrumento, ya nos resulta interesante para estudiarlo; si lo miramos a través de algún instrumento nos resultará impresionante. Este satélite, al describir una elíptica en su recorrido, ésta, en verano, se sitúa más cerca de nosotros, y si además la observamos a partir de media Luna menguante hasta la media creciente, la veremos mucho mejor, porque la luz que recibe del Sol nos deslumbra menos. Si acaso observamos la Luna desde media creciente hasta la media menguante, entonces su luz es demasiado fuerte y necesitaríamos protegernos los ojos con un filtro en nuestro aparato.

Aquí podemos hacer lo que indicábamos anteriormente: dibujar un plano detallado de todos sus accidentes geográficos, tales como la cordillera del Cáucaso, los Apeninos, los Alpes, los cráteres de Copérnico, Arquímedes, Kepler y los mares (supuestos), como el de La Tranquilidad o La Serenidad.

Tabla de F-1:

$$y = 3x^2 + 2$$

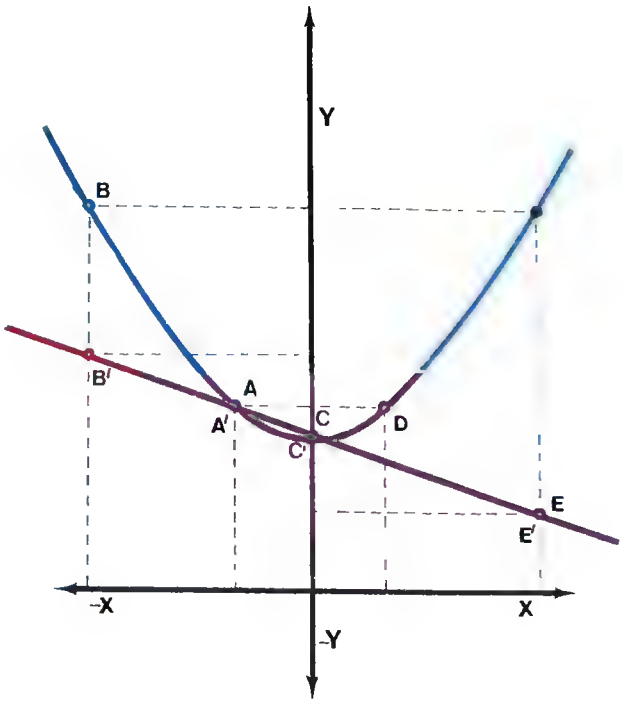
	A	B	C	D	E
x	−1/3	−1	0	1/3	1
y	7/3	−5	2	7/3	5

Tabla de F-2:

$$y = -x + 2$$

	A′	B′	C′	D′	E′
x	−1/3	−1	0	1/3	1
y	7/3	3	2	5/3	1

- Pasamos a representar estos puntos sobre un eje de coordenadas cartesianas.



Como se ve en la gráfica, las dos funciones se cortan en los dos puntos; así, pues, A coincide con A y C con C. Esto se ve también claramente mirando las dos tablas de valores.

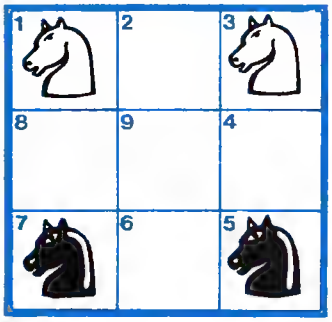
TEMA 26

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

INDICE

1.–DEFINICION DE LA FUNCION EXPONENCIAL.
2.–GRAFICAS CARTESIANAS DE LA FUNCION EXPONENCIAL.
3.–ESTUDIO Y PROPIEDADES GENERALES DE LA FUNCION EXPONENCIAL.
   3.1. Caso f (x) = a^x para a > 1.
   3.2. Caso f (x) = a^x para 0 < a < 1.
4.–PROBLEMAS.
5.–DEFINICION DE LA FUNCION LOGARITMICA.
6.–GRAFICA DE LA FUNCION LOGARITMICA.
7.–ESTUDIO Y PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMICA.
   7.1. Caso f (x) = $\log_a x$ para a > 1.
   7.2. Caso f (x) = $\log_a x$ para 0 < a < 1.
8.–DEFINICION DE LOGARITMO: PROPIEDADES Y OPERACIONES.
9.–PROBLEMAS.
10.–ECUACIONES EXPONENCIALES: PROBLEMAS.
11.–ECUACIONES LOGARITMICAS: PROBLEMAS.
12.–PROBLEMAS DE SISTEMAS LOGARITMICOS.
13.–PROBLEMAS CON SOLUCIONES.

TEMA 26



Supongamos que en un tablero de ajedrez existen solamente 9 casillas. Tenemos dos caballos blancos en las casillas 1 y 3, y dos negros en las 5 y 7. Queremos cambiar la situación de los cuatro caballos en **diagonal** y siempre respetando el normal salto de caballo, o sea, situar el caballo de la casilla n.º 1 en la casilla n.º 5 y viceversa, el de la casilla n.º 3 en la del n.º 7 y viceversa. ¿Cuántos saltos mínimos se han de realizar?

La solución en Pág. 736.

1.—DEFINICION DE LA FUNCION EXPONENCIAL

Tomemos un número real, y sólo y distinto de uno "a", que llamaremos base, pues bien, la función exponencial de base "a" será una aplicación:

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) = a^x$$

Del conjunto R en R^+

La base "a" será siempre un número constante mientras que el exponente "x" será un número variable.

Ej.: Tomemos un conjunto A formado por los elementos {1, 3, 5}, si aplicamos sobre este conjunto la función exponencial de base 3, las imágenes de los elementos del conjunto A, serán las siguientes:

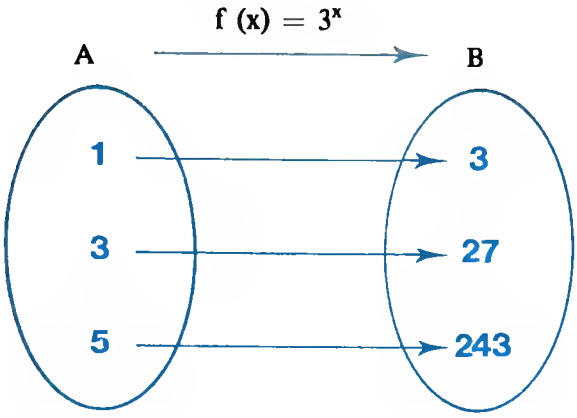
Para $x = \longrightarrow f(1) = 3^1 = 3$

Para $x = 3 \longrightarrow f(3) = 3^3 = 27$

Para $x = 5 \longrightarrow f(5) = 3^5 = 243$

Luego el conjunto A tiene por imagen al conjunto B formado por los elementos {3, 27, 243}.

Recordando el diagrama de flechas o sagitas, la solución gráfica del ejercicio será la siguiente:



Mediante este diagrama se ve claramente que la función exponencial es una aplicación de tipo biyectivo, ya que el conjunto de partida "A" posee igual número de elementos que el conjunto de llegada "B".

Veamos más ejemplos.

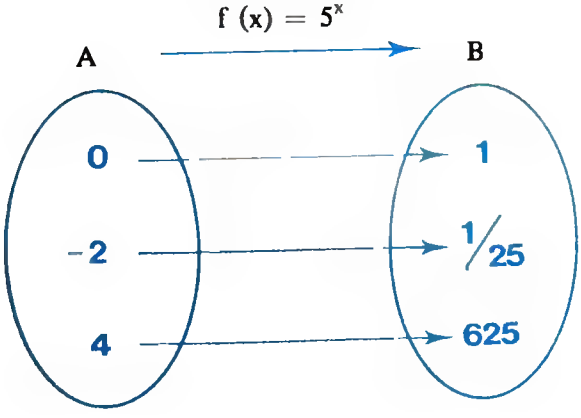
Sea $A = \{0, -2, 4\}$ y la base 5, si aplicamos la función exponencial las imágenes de los elementos de A serán:

Para $x = 0 \longrightarrow f(0) = 5^0 = 1.$

Para $x = -2 \longrightarrow f(-2) = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Para $x = 4 \longrightarrow f(4) = 5^4 = 625$

En base al diagrama de flechas tendremos:



PERCEPCION - Atención

Por Bernabé Tierno

En el afán de completar y enriquecer tu formación, vamos a darte unos contenidos elementales, pero siempre interesantes y formativos, sobre la atención y la percepción.

Te servirán para conocer mejor las potencias mentales con que trabajas a diario. Lo que pretendemos no es otra cosa que ir poco a poco familiarizándote con conceptos como memoria, percepción, atención, inteligencia, etc., para que al tiempo que estudias matemáticas te vayas informando de las funciones cognoscitivas que empleas diariamente.

¿Qué es la percepción? Es la unidad psicológica en que se basa el conocimiento sensible y no es otra cosa que la **"aprehensión (captación) de la realidad a través de los santidos"**. Pero en este acto de captación de la realidad (exterior o interior) la percepción se ve afectada por otras funciones cognoscitivas, pues está interrelacionada con las demás funciones psíquicas superiores. La propiedad fundamental de la perfección **es ser selectiva**. Esto quiere decir que sólo se percibe aquello a lo que se atiende, mientras que el resto de los estímulos pasan inadvertidos.

Pero observa que este hecho se está dando continuamente. Ahora mismo tú estás leyendo estas líneas sobre la percepción y observarás que sólo percibes, ves y te centras en unos cuantos centímetros cuadrados de la página que tienes delante, mientras los demás objetos de tu escritorio, los gritos de los niños que juegan en la calle, la radio lejana del vecino, las paredes de tu propia habitación..., en una palabra, todos los demás estímulos visuales, auditivos, táctiles, etc., que te rodean, quedan como sin efecto, silenciados y marginados en un fondo desdibujado e impreciso.

¿Sabes lo que te está ocurriendo? Sencillamente que estás percibiendo sólo aquello a lo que atiendes. Por eso quiero decirte algunas cosas sobre la atención, que es un proceso inmediatamente anterior a la percepción en el tiempo. Realmente no es fácil distinguir cuándo la atención es ya percepción, porque es un proceso mental rapidísimo.

Puesto que se trata de una aplicación de R en R^+, es decir, entre números reales, los elementos de A no tienen por qué ser siempre números positivos, el exponente "x" puede tomar también valores fraccionarios o negativos.

Sea el conjunto A, en esta ocasión, el formado por los elementos {2/3, 1/5, 3/7} y la función exponencial $f(x) = 2^x$, las imágenes que obtenemos son:

Para $x = 2/3 \longrightarrow f(2/3) = 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2}$

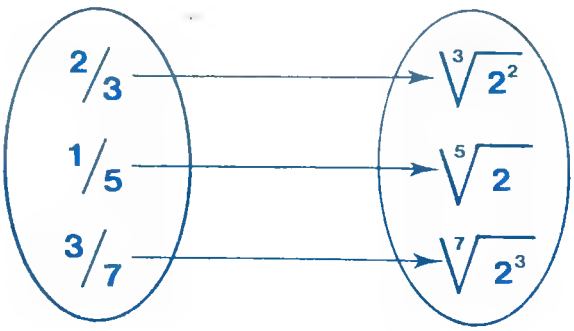
Para $x = 1/5 \longrightarrow f(1/5) = 2^{1/5} = \sqrt[5]{2}$

Para $x = 3/7 \longrightarrow f(3/7) = 2^{3/7} = \sqrt[7]{2^3}$

En base al diagrama de flechas la solución será:

$$f(x) = 2^x$$

A ⟶ B



2.–GRÁFICAS CARTESIANAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Veamos esta pregunta de forma directa con un ejemplo numérico.

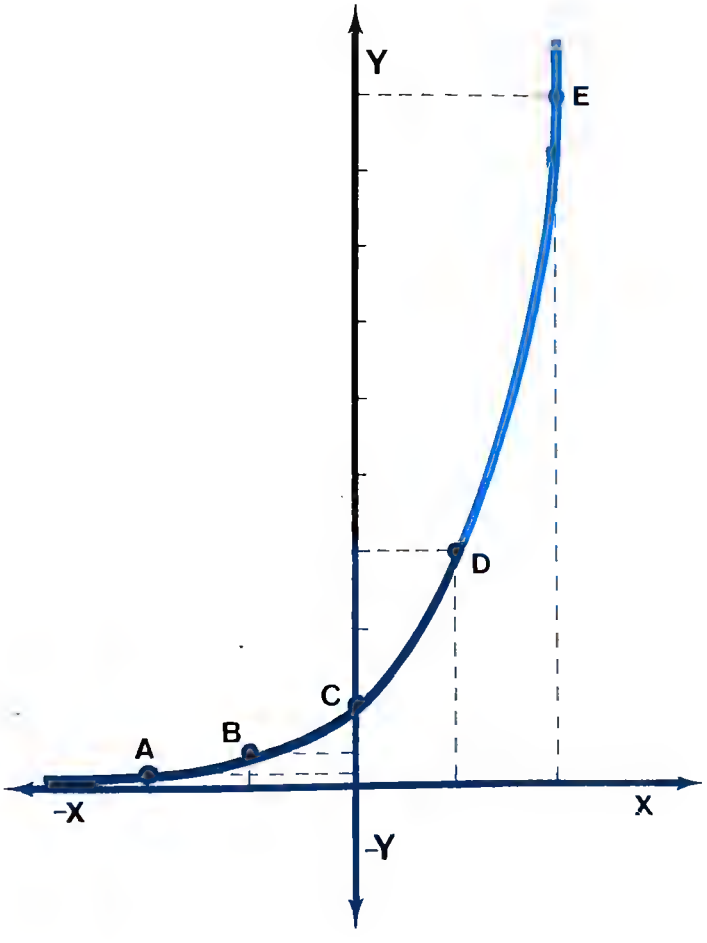
Sea la función:

$$f: x \longrightarrow 3^x$$

Realicemos una tabla de valores.

	A	B	C	D	E
x	−2	−1	0	1	2
y	1/9	1/3	1	3	9

Traslademos estos puntos al gráfico cartesiano.



¿Qué se entiende por Atención? Se han dado muchas definiciones de atención.

En 1970, Meldman, M. J., encontró 26 definiciones diferentes; sin embargo, todas incluían dos notas características: **selactividad** y **claridad**.

Selectividad, en cuanto prevalece un estímulo, y claridad, porque al centrarse sobre un solo estímulo aumenta la claridad, fuerza y nitidez de captación.

Antes de dar una definición de atención, te recuerdo la que dio nuestro filósofo Jaime Balmes, que, aunque es corta, es de las más profundas que se han dado. Balmes dice que la atención es sencillamente "la aplicación de la mente al objeto".

Una definición descriptiva de la atención podía ser ésta: Atención es el proceso por el cual centramos o focalizamos nuestra percepción de forma selectiva sobre un estímulo determinado que pasa a ocupar el primer plano en ese mismo instante, mientras que los demás estímulos del entorno desaparecen del campo atencional.

DETERMINANTES DE LA ATENCION

El acto de atender en sí y la intensidad y pureza de la atención están de alguna forma determinados por unos factores externos e internos que vamos a ver a continuación.

A) **Determinantes externos de la atención.**—Tienen un carácter predominantemente físico y exterior al sujeto, y son: tamaño, color, luminosidad, movimiento, novedad, posición, etc., del estímulo.

Así, por ejemplo, cuando abrimos un periódico, revista o libro, donde primero dirigimos la mirada es a la parte superior izquierda de la página.

Recuerda también cuando habéis estado reunidos varios amigos y un día aparece un chico nuevo, desconocido... El hecho de ser desconocido es determinante externo suficientemente poderoso para captar la atención del grupo.

B) **Determinantes internos de la atención.**—Vienen marcados por las motivaciones espectativas y demás características específicas del **sujeto** que atiende. Recuerda al respecto aquella frase latina "Quod recipitur ad modum recipientis recipitur", que quiere decir: Lo que se recibe (atiende), se recibe según el modo de ser de quien recibe.

Dentro de un momento comprobarás en el experimento de Hernández-Peón cómo el estímulo "ratones" es muy poderoso para el sujeto que recibe, que es el gato.

Para concretar más, distinguiremos entre determinantes internos fisiológicos y psíquicos.

Tomemos otro ejemplo.

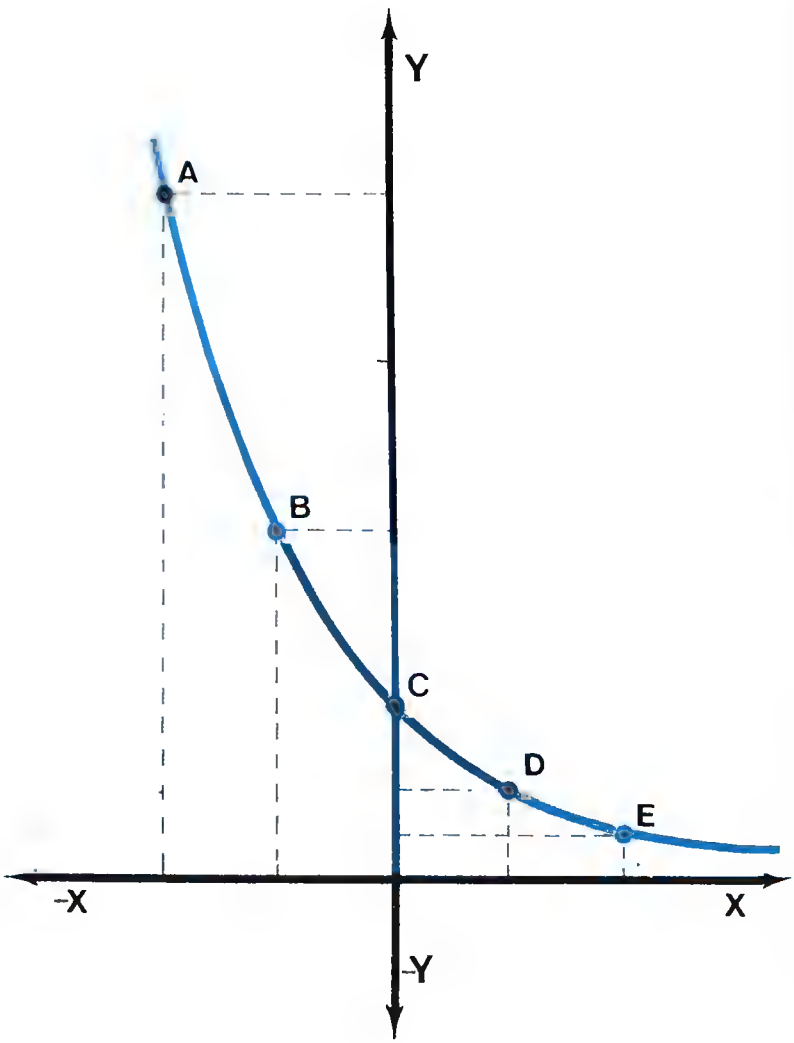
Sea ahora la función

$$f: x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Realicemos al igual que en el ejemplo anterior la tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4

Pasamos los puntos al plano cartesiano.



3.–ESTUDIO DE LA FUNCION EXPONENCIAL

3.1.

Vamos a fijarnos en la función f: $x \to 3^x$ del apartado anterior y en su representación gráfica.

La base de esta función exponencial es el número real, positivo 3.

La gráfica nos está indicando que esta función es de tipo creciente, es decir, que tomados 2 números reales x y x', tales que $x > x'$, se cumple: $3^x > 3^{x'}$:

$$x > x' \Rightarrow 3^x > 3^{x'}: \text{Creciente}$$

Esto se ve muy claro, si comparamos por ejemplo el punto D y el E de la tabla de valores de esta función:

$$2 > 1 \Rightarrow 3^2 > 3 \ : \text{Creciente}$$

Su campo de existencia es el intervalo $(-\infty, +\infty)$, ya que la función está definida para todos los valores de $X \in R$. Esto quiere decir que cualquiera que sea el valor de las x, existirá un valor de y que cumple la función $y = 3^x$.

Ejemplo:

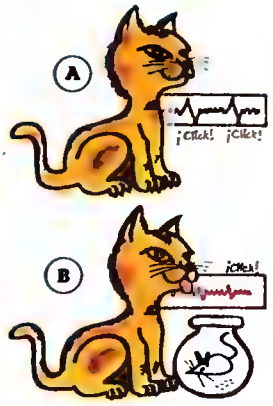
Para $x = 2 \longrightarrow y = 3^2 =$ 9

Para $x = 2 \longrightarrow y = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} =$ $\frac{1}{9}$

Para $x = 1/3 \longrightarrow y = 3^{1/3} =$ $\sqrt[3]{3}$

etc., etc.

Al tomar x valores positivos cada vez mayores, la función $y = 3^3$ irá creciendo también de forma indefinida.



Los determinantes fisiológicos son ajustes psicomotores de los órganos de los sentidos, ajustes de posturas, etc. Recuerde la erección de las orejas (para atender) en animales como el perro, el asno o el caballo; el aumento de la tensión muscular, las alteraciones cardiacas, respiratorias, de la pupila, etc., que son condiciones periféricas de la atención.

Los estudios llevados a cabo por Hernández-Peón, Schrrer y Jouvert (1956) muestran, en el momento (A) del experimento, los estímulos auditivos (clik) que llegan al gato en situación normal, tranquila, se registran en los electrodos implantados de forma bien marcada y notable.

Sin embargo, en el momento (B) del experimento (el gato contempla atentamente a los ratones encerrados en el frasco) el registro de los electrodos por el estímulo auditivo (clik) queda debilitado hasta casi desaparecer del campo de atención; la fuerza del estímulo "ratones" es para el gato tan poderosa que deja prácticamente sin efecto el poder estimular el sonido (clik).

En lo que se refiere a los determinantes psíquicos, no es fácil disociarlos de los determinantes fisiológicos pero sí distinguirlos en cuanto que se refieren más a lo estrictamente psicológico de la experiencia interna del sujeto.

Los determinantes psíquicos de la atención son: los motivos, intereses, expectativas, "sets" (disposición a percibir el entorno de un modo particular), etc.

Butler y Berlyne hablan también de la curiosidad como motivación básica del organismo. La estimulación novedosa y la curiosidad aumentan con la privación, como se ha demostrado muchas veces.

Veamos, pues, ¿qué ocurre si se nos priva de estímulos sensoriales? Bexton, W. H. y otros realizaron experiencias con sujetos a los que se pagaba muy bien por someterse a una prueba consistente en pasar varios días encerrados en una habitación, inmóviles y carentes de estímulos visuales, auditivos, táctiles, etc. El experimento demostró que, pasados uno, dos o más días, los sujetos empezaban a manifestar diferentes alteraciones de la percepción del color, de las formas, ansiedad profunda, tensión emocional, disminución del rendimiento intelectual, alucinaciones, etc.

Esto demuestra la importancia que tiene para el rendimiento intelectual la salud mental y el equilibrio psicofisiológico de una adecuada estimulación sensorial.

Desde hace algún tiempo estamos empleando la palabra estímulo y antes de seguir adelante vamos a estudiar **¿qué es un estímulo?**

He aquí algunas definiciones: Cualquier objeto que excite un sentido; todo lo que dé origen a una sensación, percepción o respuesta glandular o muscular; cualquier situación o proceso que ocasione una respuesta observable.

Ejemplo:

Para $x = 2$	$y = 3^2 = 9$
$x = 3$	$y = 3^3 = 27$
$x = 4$	$y = 3^4 = 81$
$x = 5$	$y = 3^5 = 243$
"	"
"	"
"	"
"	"
"	"
"	"
$x = \infty$	$y = 3^{\infty} = \infty$

Al tomar x valores negativos cada vez menores, la función $y = 3^x$ se irá aproximando a cero, aunque no se anulará, es decir, siempre se encontrará por encima del eje de las "x", nunca lo cortará (véase gráfica).

Ejemplo:

Para $x = -2$	$y = 3^{-2} = \frac{1}{9} = 0{,}111...$
$x = -3$	$y = 3^{-3} = \frac{1}{27} = 0{,}037...$
$x = -4$	$y = 3^{-4} = \frac{1}{81} = 0{,}012...$
$x = -5$	$y = 3^{-5} = \frac{1}{243} = 0{,}00411...$
"	"
"	"
"	"
"	"
"	"
"	"
$x = -\infty$	$y = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$

Al tomar x el valor de cero, la función $y = 3^x$ tomará el valor de uno:

$$x = 0 \longrightarrow y = 3^0 = 1$$

Al tomar x el valor de uno, la función $y = 3^x$ tomará el valor de la base, es decir, 3:

$$x = 1 \longrightarrow y = 3^1 = 3$$

Pues bien, con todos estos datos tenemos el estudio completo de la función exponencial $y = 3^x$.

Pero en Matemáticas nos interesan los casos generales, no los concretos; así, pues, los resultados vistos anteriormente se generalizan para el caso de la función exponencial

$$y = a^x \text{ para todo } a > 1$$

La base de esta función es el número real a, positivo y mayor que uno.

Es una función de tipo creciente, es decir, que tomando dos números reales x y x', tales que $x > x'$, se cumple $a^x > a^{x'}$:

$$x > x' \Rightarrow a^x > a^{x'}. \text{ Creciente}$$

Su campo de existencia es el intervalo $(-\infty, +\infty)$, ya que la función está definida para todos los valores de $X \in R$. Es decir, que cualquiera que sea el valor de las x, existe un valor de y, que cumple la función $y = a^x$.

Al tomar x valores positivos, cada vez mayores, la función $y = a^x$ irá creciendo también de forma indefinida.

Al tomar x valores negativos, cada vez menores, la función $y = a^x$ se irá aproximando a cero, aunque no se anulará. Por tanto, la gráfica de la función aparece siempre dibujada por encima del eje de las x.

Al tomar x el valor de cero, la función $y = a^x$ tomará el valor de uno.

$$x = 0 \longrightarrow y = a^0 = 1$$

Al tomar x el valor de uno, la función $y = a^x$, tomará el valor de a.

Proceso estimular

En los animales superiores los estímulos son captados por órganos sensoriales, como el ojo. A esa captación o percepción le sigue la conducción de la excitación por el nervio hasta un órgano efector que provocará bien un movimiento muscular o una secreción glandular.

Diferentes investigadores han opinado sobre el proceso estimular.

He aquí unas cuantas preguntas que siguen haciéndose los científicos respecto al estímulo.

1. ¿Los estímulos existen en el ambiente o solamente en los receptores?

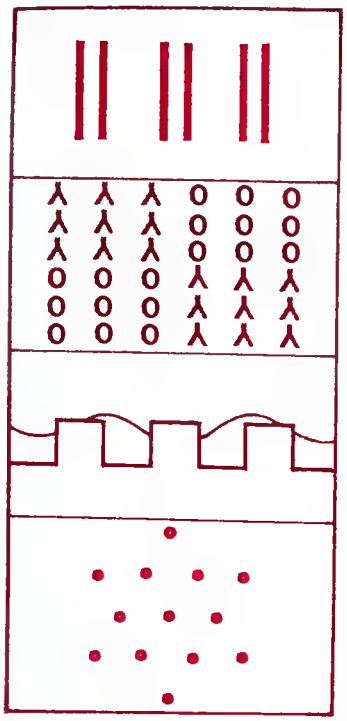
2. ¿Es el estímulo causa suficiente de una respuesta?

3. ¿Transmiten los estímulos información sobre las cosas, o sólo producen las cualidades sensoriales de aquellos sentidos que son afectados por la estimulación?

La opinión más aceptada es que la razón de una respuesta determinada no puede ser el estímulo en sí, pues la energía estimular sólo logra realizarse en un organismo capaz de sentir.

Recordemos la ley de *Johannes Muller:* "La cualidad de cada sensación no depende de los atributos del estímulo sino de la **clase de nervio estimulado.** El que siente, por tanto, es el sujeto, no el sentido.

Pero, ¿qué es la percepción? Es una función psíquica que mediante los órganos de los sentidos permite que el organismo procese la información sobre el ambiente. Vemos que percibir es un proceso psicofísico en el cual importa el estímulo, pero la potencia estimular sólo será efectiva cuando genere en el sentido el adecuado proceso que descodifique el cerebro del sujeto.



Las cosas no aparecen siempre como realmente son. Lo que escuchamos o vemos no es siempre lo que se nos manifiesta y muchas veces el sistema perceptivo se equivoca. Se dan frecuentemente ilusiones perceptivas, por efectos del movimiento, del color, etc., pero antes de hablar de las ilusiones perceptivas, vamos a ver unas cuantas **leyes que regulan la agrupación de los estímulos en totalidades**.

1.ª) **Ley de Proximidad**.—En igualdad de circunstancias los estímulos mas **próximos** tienden a percibirse como formando parte de un mismo objeto.

2.ª) **Ley de Semejanza**.—En igualdad de circunstancias, los estímulos **semejantes** tienden a percibirse como formando parte de un "todo".

3.ª) **Ley de Continuidad**.—A igualdad de circunstancias, tendemos a percibir como formando parte de una misma figura los estímulos que guardan entre sí una continuidad de forma.

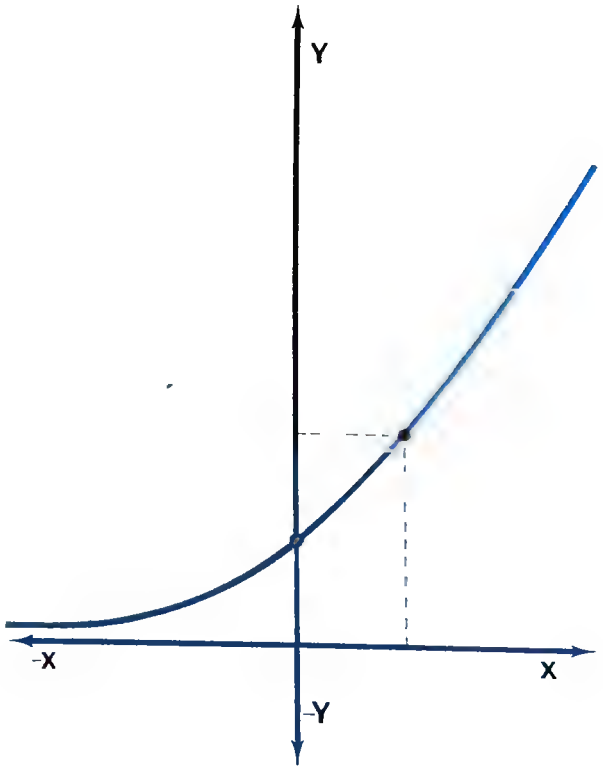
4.ª) **Ley de Simetría** (o "de buena figura").—Es la tendencia a organizar los estímulos de forma simétrica: una estrella en este caso.

Con lo que se obtiene el siguiente cuadro de valores generales:

$$y = a^x$$

x	$-\infty$	crece	0	1	crece	∞
y	0	crece	1	a	crece	∞

Pasamos a representarlos.



SOLUCION AL PROBLEMA DE LA MAQUINA DE ESCRIBIR, PAGINA 694

Vemos que Lola escribe una vez y media más rápido que José, o sea, que Lola tiene por tanto una vez y media más folios que José; de esta manera terminarán el trabajo a la par. Quiere decirse entonces que Lola tiene que escribir las 3/5 partes de los folios y José los 2/5.

Lola, para hacer **todo** el trabajo, tardará 2 horas; ahora lo hará en $2 \times 3/5 = 6/5 = 1$ hora y 1/5 de hora, o también en 1 hora y 60'/5 de hora (60'/5 = 15 minutos) o también en 1 hora y 15 minutos.

Por supuesto, José tardará también 1 hora y 15 minutos en realizar sus 2/5 partes del trabajo.

Así, pues, solución:

1 h. y 15 minutos

3.2

Al igual que en el punto 3.1., vamos a fijarnos en la función

$$f: x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

vista en la pregunta anterior.

La base de esta función exponencial es el número real, positivo 1/2.

Si miramos la gráfica (véase el dibujo), ésta nos indica que la función es de tipo decreciente, es decir, que tomados 2 números reales x y x', tales que $x' > x$, se cumple que $(1/2)^{x'} < (1/2)^x$:

$$x' > x \Rightarrow (1/2)^{x'} < (1/2)^x: \text{Decreciente}$$

Esto se ve muy bien si comparamos, por ejemplo, el punto C y D de la tabla de valores de esta función:

$$1 > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 < \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

Esto está claro, ya que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

El campo de existencia de esta función es el intervalo $(-\infty, +\infty)$, ya que la función está definida para todos los valores de $X \in R$. Esto quiere decir que cualquiera que sea el valor de los x, existirá siempre un valor de y, que cumple la función $y = (1/2)^x$.

Ejemplo:

Para $x = -2 \longrightarrow y = (1/2)^2 = 1/4$

Para $x = -2 \longrightarrow y = (1/2)^{-2} = \dfrac{1}{(1/2)^2} = 4$

Para $x = 0 \longrightarrow y = (1/2)^0 = 1$

Para $x = 1/3 \longrightarrow y = (1/2)^{1/3} = \sqrt{1/2}$

Para $x = -1/3 \longrightarrow y = (1/2)^{-1/3} = \sqrt{(1/2)^{-1}} = \sqrt{2}$

etc., etc.

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS".

Las múltiples historietas y datos curiosos en los márgenes de cada página, tocando directa o indirectamente las matemáticas, contribuyen a que el estudio árido de los contenidos matemáticos sean más **gratos y relajantes** ya que estas curiosidades, no sólo captan el interés del alumno, sino que le divierten y entusiasman, al tiempo que le proporcionan un respiro necesario.

Bernabé Tierno

MATEMATICAS HELENICAS

Además de las primeras herencias que tuvieron los griegos de los fenicios, de Egipto y de Mesopotamia, el gobierno griego se preocupó de enviar a sus mejores matemáticos a Egipto, donde estudiaron. A los griegos se debe la organización de las matemáticas hasta convertirlas en una ciencia ordenada y racional, con todo rigor en las deducciones y partiendo paralelamente a la doctrina filosófica de verdades evidentes.

El punto más alto lo alcanzaron en el año 600 antes de J.C., donde se crearon dos escuelas, la Jonia y la Itálica. La Jonia con Tales de Mileto amplió los conocimientos de Geometría; la Itálica, fundada por Pitágoras, más ambiciosa, estudiaba la Aritmética, la Geometría (plana y esférica) y la Música, enseñando los intervalos musicales por medio de la Aritmética. Parménides y Cenón, alumnos aventajados en ésta, perfeccionaron conocimientos.

En el año 300 antes de J.C. Alejandría se convirtió en la capital de la cultura griega. Euclides, Diofanto, Papo, Proclo, siguieron esta escuela. Axiomas, postulados, etc., se imponían con insultada evidencia.

Continúa en la página siguiente.

Al tomar x valores positivos cada vez mayores, la función $y = (1/2)^x$ irá decreciendo de forma indefinida, aproximándose a cero aunque no se anulará, es decir, siempre se encontrará la gráfica por encima del eje de las x, nunca lo cortará (véase la gráfica).

Ejemplo:

Para $x = 1 \longrightarrow y = (1/2)^1 = 1/2 = 0{,}5$

Para $x = 2 \longrightarrow y = (1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25$

Para $x = 3 \longrightarrow y = (1/2)^3 = 1/8 = 0{,}125$

Para $x = 4 \longrightarrow y = (1/2)^4 = 1/16 = 0{,}0625$

Para $x = 5 \longrightarrow y = (1/2)^5 = 1/32 = 0{,}03125$

" "
" "
" "
" "
" "
" "

Para $x = \infty \longrightarrow y = (1/2)^\infty = 1/\infty = 0$

Al tomar x valores negativos cada vez menores, la función $y = (1/2)^x$ irá creciendo de forma indefinida (véase la gráfica)

Ejemplo:

Para $x = -1 \longrightarrow y = (1/2)^{-1} = \dfrac{1}{1/2} = 2$

Para $x = -2 \longrightarrow y = (1/2)^{-2} = \dfrac{1}{(1/2)^2} = 4$

Para $x = -3 \longrightarrow y = (1/2)^{-3} = \dfrac{1}{(1/2)^3} = 8$

Para $x = -4 \longrightarrow y = (1/2)^{-4} = \dfrac{1}{(1/2)^4} = 16$

Para $x = -5 \longrightarrow y = (1/2)^{-5} = \dfrac{1}{(1/2)^5} = 32$

" "
" "
" "
" "
" "
" "

Para $x = -\infty \longrightarrow y = (1/2)^{-\infty} = \dfrac{1}{(1/2)^\infty} = \infty$

Al tomar x el valor de cero, la función $y = (1/2)^x$ tomará el valor de uno.

$$x = 0 \rightarrow y = (1/2)^0 = 1$$

Al tomar x el valor de uno, la función $y = (1/2)^x$ tomará el valor de la base, es decir, 1/2.

$$x = 1 \rightarrow y = (1/2)^1 = 1/2$$

Pues bien, al igual que en el caso anterior, con todos estos datos tenemos el estudio completo de la función exponencial $y = (1/2)^x$.

Pero como se ha dicho anteriormente, en Matemáticas nos interesan los casos generales; así pues, tomando como punto de partida este caso concreto, vamos a generatizarla para el caso de la función exponencial $y = a^x$, cuando $0 < a < 1$.

La base de esta función es el número real a, positivo y **menor** que uno.

Es una función de tipo decreciente, es decir, que tomando dos números reales x y x', tales que $x' > x$, se cumple $a^{x'} < a^x$:

$$x' > x \Rightarrow a^{x'} < a^x. \text{ Decreciente}$$

Su campo de existencia es el intervalo $(-\infty, +\infty)$, ya que la función está definida para todos los valores de $X \in R$. Es decir, que cualquiera que sea el valor de las x, existe un valor de y que cumple la función $y = a^x$.

Al tomar x valores positivos, cada vez mayores, la función $y = a^x$ se irá aproximando a cero, aunque no se anulará. Por tanto, la gráfica de la función aparece siempre dibujada por encima del eje de las x.

Al tomar x valores negativos, cada vez menores, la función $y = a^x$ irá creciendo de forma indefinida.

Al tomar x el valor de cero, la función $y = a$ tomará el valor de uno.

$$x = 0 \rightarrow y = a^0 = 1$$

Al tomar x el valor de uno, la función $y = a^x$ tomará el valor de a:

$$x = 1 \rightarrow y = a^1 = a$$

Con lo que se obtiene el siguiente cuadro de valores generales:

$$y = a^x$$

Así la Aritmética, Algebra, Geometría y Astronomía, iban alcanzando rápidamente dimensiones desconocidas. Apolonio con su tratado sobre cónicas, estudios de cicloides y epicicloides. Sin la menor duda, el más grande de los seguidores de esta escuela fue Arquímedes, que además de determinar volúmenes (cilindro y esfera), cálculo de estudios de la parábola, etc., trajo una nueva ciencia, "la Mecánica", "El Cálculo Integral", etc. En una palabra, Arquímedes fue el precursor del conocimiento de la ciencia moderna.

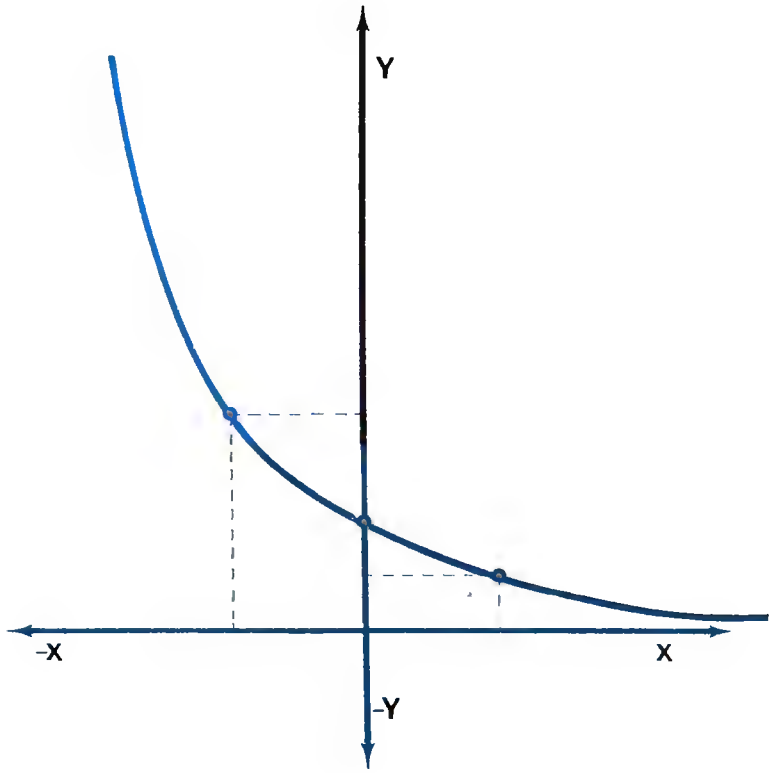
Durante el siglo II antes de J.C. aparece Hiparco con la Trigonometría plana y esférica y los grandes descubrimientos astronómicos.

En el siglo primero de nuestra era, la Geometría de Herón y sus estudios físicos.

Nicómano y Menelao, el [illegible]no Tolomeo. Todo este [illegible]a matemática helénica [illegible] la Filosofía en segundo plano, hasta que en el siglo III de nuestra era resurgió nuevamente la Filosofía, no sabiendo si fue debido a la escasa afición que se profesó a las matemáticas, o debido a que la Filosofía, al oponerse al Cristianismo, se convirtió en la ciencia de moda, renaciendo de sus cenizas.

x	$-\infty$	crece	0	1	crece	∞
y	∞	decrece	1	a	decrece	0

Pasemos a representarlos:



En el siglo 494 se crearon los "ediles plebeyos" para ejecutar los mandatos de los tribunos. En el 367, se eligieron entre los comicios tribunos dos "ediles"; unos y otros tenían como misión cuidar del orden y limpieza de las calles y edificios públicos, también protegían a los compradores de los engaños de los vendedores, vigilaban los archivos y principalmente organizaban los juegos que tenían lugar en las fiestas religiosas, donde podían comprar popularidad a cambio de la cual subir de posición.

Estos ediles vigilaban y organizaban incluso las fiestas en los circos romanos, a las cuales las llamaban juegos. Cada vez se hicieron estos juegos más suntuosos para procurarse el beneplácito de los césares. En el 65, hubo un combate con más de 600 gladiadores, todos ellos con corazas de plata. Posteriormente estos ediles aumentaron en número, pero disminuyeron en poder, pasando éste a los pretores, a los cuestores y al prefecto de la ciudad.

4.—PROBLEMAS

1.—Hallar las imágenes de 0, 1/2, −1/2, 3 y 2,25 mediante la función exponencial de base 4. Representarlo mediante un diagrama de flechas.

Para $x = 0 \longrightarrow f(0) = 4^0 = 1$

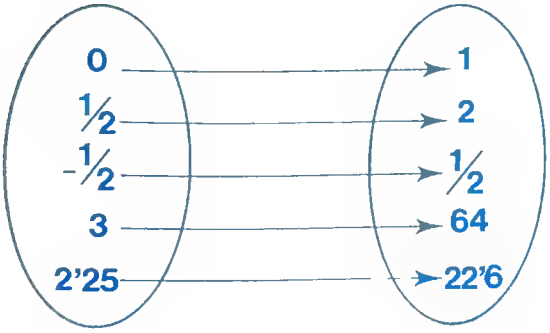
Para $x = 1/2 \longrightarrow f(1/2) = 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

Para $x = -1/2 \longrightarrow f(-1/2) = 4^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

Para $x = 3 \longrightarrow f(3) = 4^3 = 64$

Para $x = 2{,}25 \longrightarrow f(2{,}25) = 4^{2,25} = 22{,}6$

$$A \xrightarrow{f(x) = 4^x} B$$



2.—Hallar las imágenes de −2, −1, 0, 1 y 2 mediante la función exponencial de base 2/3. Representarlo mediante un diagrama de flechas.

Para $x = -2 \longrightarrow f(-2) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{2^{-2}}{3^{-2}} = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$

Para $x = -1 \longrightarrow f(-1) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{2^{-1}}{3^{-1}} = \dfrac{3}{2}$

Para $x = 0 \longrightarrow f(0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{0} = 1$

Para $x = 1 \longrightarrow f(1) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1} = \dfrac{2}{3}$

Para $x = 2 \longrightarrow f(2) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2} = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}$

OBSERVACION DE ECLIPSES

El observar un eclipse total de Luna dura más de una hora y media, y con un buen instrumento óptico tendremos la imborrable posibilidad de poder seguirlo y ver, además, la gran gama de colores que se producen en cada momento. Al mismo tiempo, y como anteriormente hemos observado la Luna (cuando no existía eclipse), los detalles lunares que ya conocemos han adquirido una nueva dimensión y una forma muy distinta.

No tan interesante como este estudio es también observar cuando la Luna pasa por delante de una estrella, ocultándola; entonces vemos que ésta desaparece rápidamente tras la Luna, dándonos la sensación de que en esta estrella desaparecía la luz, pero al cabo de unos instantes la veremos aparecer por el lado opuesto.

En un laboratorio químico, a un oficial se le ha quemado parta de un papel —al dejarlo entre distintos productos químicos—. Era un cálculo vital, quedando reducido a una operación en la que sólo se podían ver algunos números.

Uno de los bioquímicos del laboratorio tomó el papel (lo que quedaba) y copió los números que se entendían an otro papel y puso puntos en los números que no se entendían para descifrarlos. Quedó la operación como sigue:

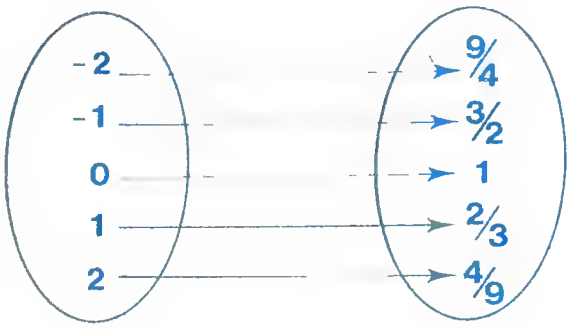
$$\begin{array}{r} \bullet 2 \bullet \\ \times\ 4 \bullet 6 \\ \hline \bullet 17 \bullet \\ 1 \bullet 8 \bullet \\ \bullet 11 \bullet \\ \hline 2 \bullet\bullet \bullet 44 \end{array}$$

¿Sabrías sustituir los puntos por los números qua faltan?

La solución en Pág. 752.

$$f(x) = (2/3)^x$$

$$A \longrightarrow B$$



3.—Hallar las imágenes de -1, $-1/2$, 0, $1/2$, y 1 mediante la función exponencial de base 9. Representarlo mediante el diagrama de flechas y sobre unos ejes de coordenadas cartesianas rectangulares.

Para $x = -1 \longrightarrow f(-1) = 9^{-1} = \frac{1}{9}$

Para $x = -1/2 \longrightarrow f(-1/2) = 9^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

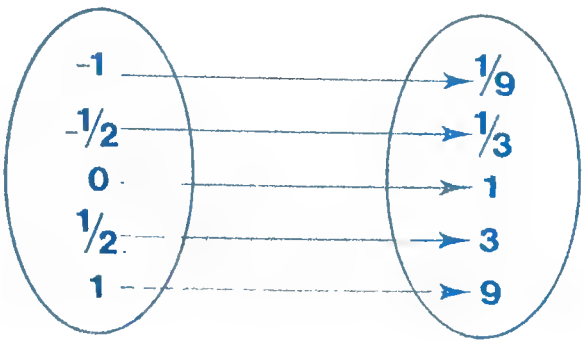
Para $x = 0 \longrightarrow f(0) = 9^0 = 1$

Para $x = 1/2 \longrightarrow f(1/2) = 9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$

Para $x = 1 \longrightarrow f(1) = 9^1 = 9$

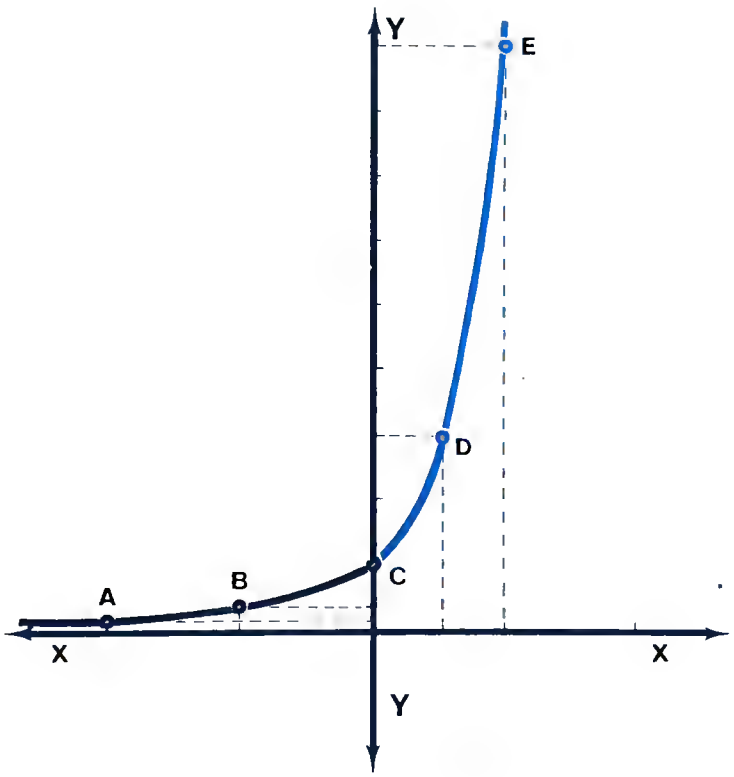
$$f(x) = 9^x$$

$$X \longrightarrow Y$$



Cada par de valores representan un punto en el gráfico cartesiano. Coloquémoslos para verlo más claramente en una tabla de valores como las utilizadas anteriormente.

	A	B	C	D	E
x	−1	−1/2	0	1/2	1
y	1/9	1/3	1	3	9



4.—Hallar las imágenes de 1, 0, −1 y −2 mediante la función exponencial de base 1/4. Represéntalo gráficamente en unos ejes de coordenadas cartesianas rectangulares.

$$\text{Para } x = 1 \longrightarrow f(1) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Para } x = 0 \longrightarrow f(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

$$\text{Para } x = -1 \longrightarrow f(-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1^{-1}}{4^{-1}} = 4$$

$$\text{Para } x = -2 \longrightarrow f(-2) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1^{-2}}{4^{-2}} = 4^2 = 16$$

PERCEPCION Y ENTORNO O CONTEXTO
(ilusiones ópticas)

Por Bernabé Tierno

No hay nada que se elabore de forma aislada. Cualquier información se integrará en una interpretación total de la escena visual.

Percepción y motivación social.

Varios experimentos han demostrado que las motivaciones sociales influían en cierta medida sobre la percepción de objetos.

Los trabajos de Bruner y Goodman (1947), pretendían demostrar que, a igualdad de tamaño, las monedas de más valor real se veían mayores de tamaño que las de menor valor real. Pero esto no fue lo más interesante del experimento. Lo más importante fue descubrir que los niños pobres y con mayores necesidades económicas era los que sobreestimaban el tamaño de las monedas considerablemente más que los niños ricos.

Un año más tarde, Bruner y Postman (1948) presentaron a los niños tres discos de plástico con un dibujo distinto en cada disco. Uno tenía dibujado el signo del dólar, otro la cruz gamada y el tercero una figura sin valor social alguno.

No olvidemos que en 1948 estaba recién terminada la guerra contra Alemania. Pues bien, la tarea experimental consistía en mantener el disco en la palma de la mano al tiempo que se variaba el diámetro de un círculo luminoso en una pantalla; había que igualar el disco luminoso de la pantalla con el de plástico.

Quedó demostrado que los discos que poseían una significación o valor social (el caso del dólar y la cruz gamada) eran sobreestimados por los niños y tendían a agrandar el círculo luminoso.

Es claro que la motivación personal de cada sujeto influye en la manera de percibir la realidad.

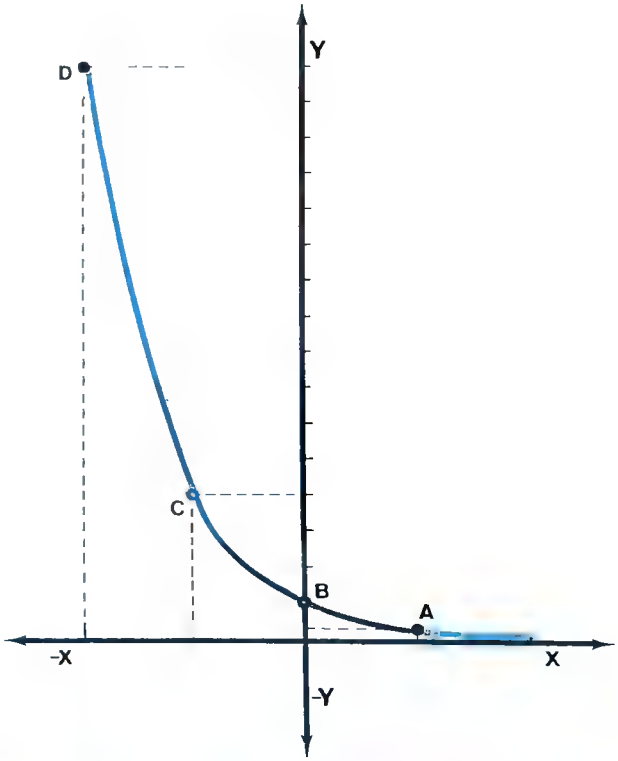
La percepción de la realidad necesita un aprendizaje. Es necesario la experiencia para desarrollar la percepción. En 1932, Senden, M. experimentó con varios sujetos operados de cataratas congénitas y que por tanto no habían aprendido a percibir la realidad.

Cuando recobraron por primera vez la vista, como su información visual era limitadísima y apenas estructurada ocurrieron situaciones divertidas como éstas: Una niña al ver moverse una mancha oscura dijo al tocarla.

¡Pero si es el gato! Si a estos sujetos se les pedía que dijeran cuál de dos tiras de cartón de 10 y 20 cm., respectivamente, era más larga, necesitaban ayudarse del tacto para averiguarlo, pues su vista no sabía medirlas. Es imprescindible el aprendizaje, aunque hay aspectos en la percepción que suponen la base de una maduración biológica, la percepción completa, perfecta, necesita de la experiencia en general y de la actividad en particular. "El movimiento se demuestra andando y viceversa". Por eso, en todo aprendizaje es básico pasar de lo teórico a lo práctico y de lo práctico a lo teórico de forma continuada.

Agrupando estos pares de valores en una tabla tendremos:

	A	B	C	D
x	1	0	−1	−2
y	1/4	1	4	16



5.–DEFINICION DE LA FUNCION LOGARITMICA

Anteriormente estudiamos la función exponencial:

$$x \xrightarrow{f} f(x) = y = a^x$$

Pues bien, la inversa de esta función es otra función que cumple:

$$y = a^x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(y) = x$$

A esta inversa $f^{-1}(y)$ se le representa por la expresión "$\log_a y$".

Por tanto:

$$f^{-1}(y) = x = \log_a y, \text{ equivale a } y = a^x$$

Pero como lo normal en Matemáticas es representar la variable independiente por la letra "x" y la dependiente por la letra "y", entonces escribiremos:

$$f^{-1}(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^x$$

A esta aplicación de $R^- \rightarrow R$, se la conoce con el nombre de Función Logaritmica, y se lee "y es igual al logaritmo en base a del número x".

La base "a", es un número real, positivo y distinto de uno, al igual que ocurría en la función exponencial:

$$a > = \quad y \quad 0 < a < 1$$

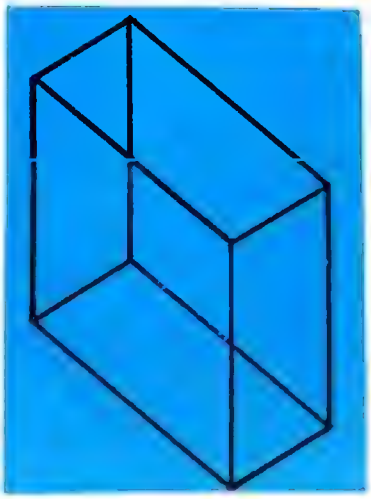
Ejemplo:

Tenemos la función logarítmica

$$y = \log_3 x$$

Las imágenes de {3, 9, 27, 81} son:

$$f(1) = \log_3 1 = 0, \text{ ya que } 1 = 3^0$$
$$f(3) = \log_3 3 = 1, \text{ ya que } 3 = 3^1$$
$$f(9) = \log_3 9 = 2, \text{ ya que } 9 = 3^2$$
$$f(27) = \log_3 27 = 3, \text{ ya que } 27 = 3^3$$
$$f(81) = \log_3 81 = 4, \text{ ya que } 81 = 3^4$$



ORGANIZACIONES PERCEPTIVAS EN COMPETENCIA

Cuando una imagen no tiene suficiente información relevante o presenta demasiados datos irrelevantes, suele ser ambigua y dar lugar a varias formas de interpretarla o percibirla.

En 1832, el suizo Becker observó que si fijaba la mirada en un romboide transparente se le aparecía alternativamente en dos posiciones distintas. La misma cara del cuerpo oscila entre el frente y el fondo. Es la conocida ilusión del "cubo de Necker". Como vemos, una figura puede percibirse alternativamente de diversas maneras. Y el verlo de una o de otra forma depende en gran manera de la disposición particular de cada sujeto, así como de las primeras impresiones y expectativas.

Eso puedes observarlo en la famosa figura ambigua de la "suegra o la nuera".

Si reunimos por separado a dos grupos de personas y a uno le decimos que van a ver una señora anciana y a otro que van a ver a una señora joven, habremos creado unas expectativas diferentes en cada grupo y unos verán en su mayoría a una anciana y los otros a una joven. Otro tanto ocurre en la obra de Dalí "El mercado de esclavos", con el busto de Voltaire que desaparece. En él se ve que las caras de las monjas son los ojos de Voltaire. La unión de los hombros de

Continúa en la página siguiente.

las monjas forman la nariz, y el blanco de sus tocas, la barbilla.

Hemos observado que el inducir unas expectativas determina ya de alguna forma lo que se va a percibir, con lo cual tenemos que concluir que **dadas ciertas condicionas de ambigüedad en los astímulos, normalmente sa parcibe, LO QUE SE ESPERA, DESEA O LE HAN dicho a uno que perciba o vea.**

PRESION DEL GRUPO Y PERCEPCION

"El efecto Asch". En cualquier libro de psicología social puedes ampliar esta experimentación que en 1951 aportó Asch, demostrando en qué forma un grupo puesto de acuerdo y manteniéndose firme en la apreciación claramente distorsionada en cuanto a las magnitudes de unes líneas, logra hacerle percibir lo que el grupo dice que percibe.

Todos los del grupo están "compinchados", es decir, que la línea "A" tiene una longitud más pareja con la línea "X" y cuando tiene que emitir su juicio se somete al juicio del grupo. **Ve lo que el grupo dice ver.**

Es la gran prueba con que Solomon Asch demostró la fuerza del grupo como generadore del **conformismo.**

¿Pero realmente el grupo logra que el sujeto experimental quede convencido de su afirmación, o simplemente se ciñe a la opinión del grupo para no atraer sobre sí su rechazo? Las dos posibilidades pueden darse.

Ejemplo:

Tenemos la función logarítmica:

$$y = \log_5 x$$

Las imágenes de {5, 25, 125, 625} son:

$$f(5) = \log_5 5 = 1, \text{ ya que } 5^1 = 5$$
$$f(25) = \log_5 25 = 2, \text{ ya que } 25 = 5^2$$
$$f(125) = \log_5 125 = 3, \text{ ya que } 125 = 5^3$$
$$f(625) = \log_5 625 = 4, \text{ ya que } 625 = 5^4$$

6.–GRAFICA DE LA FUNCION LOGARITMICA

Veamos este apartado de una forma directa, con el ejemplo numérico, visto anteriormente:

$$y = \log_3 x$$

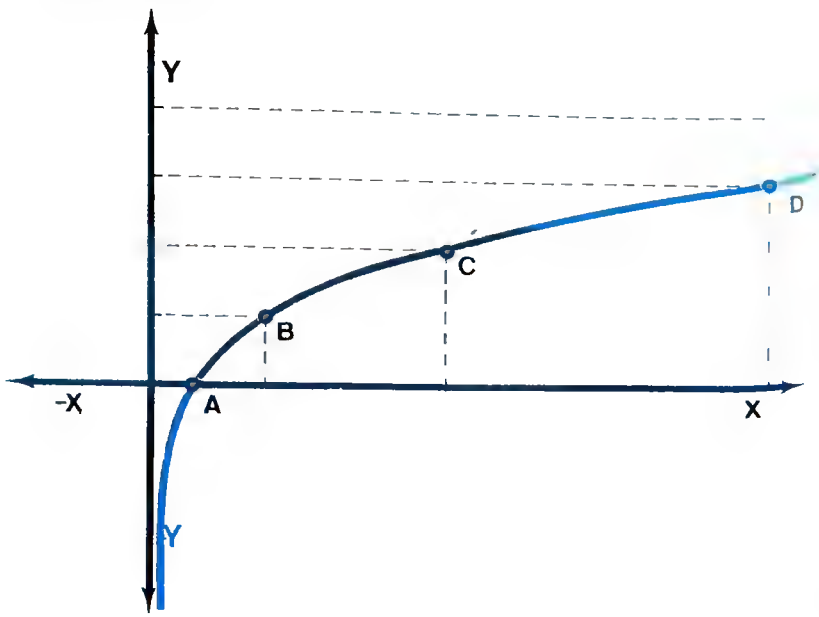
Ver que esta función es la inversa de la función exponencial:

$$y = 3^x$$

Realicemos una tabla de valores:

	A	B	C	D	E
x	1	3	9	27	81
y	0	1	2	3	4

Representamos:



Analicemos otro ejemplo, donde la base sea un número mayor que cero pero menor que uno:

$$y = \log_{1/2} x$$

Esta función es la inversa de la función exponencial:

$$y = (1/2)^x$$

Realicemos una tabla de valores.

	A	B	C	D	E	F
x	1	1/2	1/4	1/8	2	4
y	0	1	2	3	−1	−2

Ya que:

$\log_{1/2} 1 = 0$, ya que $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$\log_{1/2} 1/2 = 1$, ya que $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$

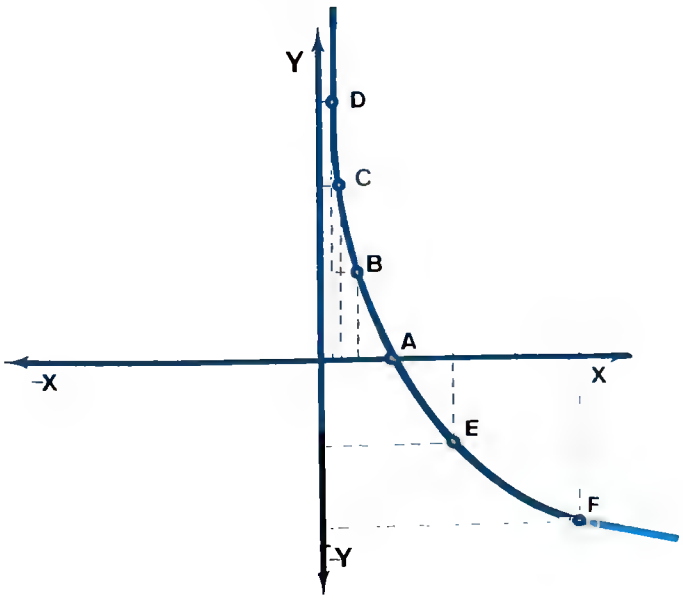
$\log_{1/2} 1/4 = 2$, ya que $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\log_{1/2} 1/8 = 3$, ya que $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\log_{1/2} 2 = -1$, ya que $2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\log_{1/2} 4 = -2$, ya que $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Representamos el cuadro de valores.



POS-EFECTOS

Si fijamos la vista durante algún tiempo en una luz fuertemente coloreada y dirigimos después la mirada a una superficie blanca y lisa, veremos la misma imagen primitiva, pero en su color complementario.

imagen original que miramos en 30 seg.	pos-imagen
en Rojo	vemos Verde
en Negro	vemos Blanco
en Azul	vemos Amarillo

Pos-efectos del movimiento.—Si durante treinta segundos fijas tus ojos sin moverlos en un objeto que se mueva de forma continua en una dirección y después desvías la mirada hacia una superficie lisa, observarás que ahora el movimiento sigue la dirección opuesta al movimiento original.

Hazte tú mismo una espiral de cartulina fina, semejante a la que aparece en este dibujo. Colócala sobre un disco giratorio a 33 1/3 r.p.m. Fija la mirada justamente en el centro de la espiral durante 30 segundos. Aparta la mirada de la espiral y mira la pared o a un folio en blanco y experimentarás por ti mismo el pos-efecto del movimiento.

Pos-efectos del color

Fija tu mirada en el punto negro del recuadro "A", que tiene dibujados nueve corazones en color **verde**.

Sigue fijando tu mirada en el punto negro y sin parpadear, hasta que toda la figura "A" empiece a difuminarse. Después fijas la mirada en el punto negro del recuadro "B" que está en blanco. Parpadea alguna que otra vez, pero sin apartar los ojos del punto negro, y verás cómo aparece la pos-imagen de varios corazones, pero en color **rojo**. Ya hemos visto que el rojo es complementario del verde.

Pero, ¿cómo se explican los pos-efectos?—Para explicar los pos-efectos deben tenerse siempre en cuenta dos aspectos básicos.

1.º) El pos-efecto es siempre lo opuesto o complementario tanto en el **movimiento** como en el **color**, presión **muscular**, etc. Si quieres experimentar en ti mismo el pos-efecto muscular, presiona fuertemente hacia abajo durante medio minuto y aparta después tus brazos; observarás cómo tus brazos se elevan como movidos por un resorte interno: es el **pos-efecto muscular**. Buena demostración de la lucha que mantienen entre sí dos sistemas antagónicos.

Continúa en la página siguiente.

7.—ESTUDIO DE LA FUNCION LOGARITMICA

7.1.—Nos vamos a fijar en la función $y = \log_3 X$ vista anteriormente y en su representación gráfica.

La base de esta función logarítmica es el número real, positivo 3.

La gráfica nos indica que es una función de tipo creciente, es decir, que tomados 2 números reales x y x', tales que $x' > x$, se cumple $\log_3 x' > \log_3 x$:

$$x' > x \Rightarrow \log_3 x' > \log_3 x: \text{Creciente}$$

Si comparamos el punto "C" y "D" de la tabla de valores esto se ve muy bien.

$$\begin{array}{ccc} 27 > 9 \Rightarrow & \log_3 27 & > \log_3 9 \\ & \| & \| \\ & 3 & > 2 \end{array}$$

El campo de existencia es el intervalo $(0, \infty)$, ya que por la propia definición logarítmica, los números negativos no poseen logaritmos.

Ejemplo:

$$\text{Para } x = 3 \longrightarrow y = \log_3 3 = 1$$

$$\text{Para } x = 9 \longrightarrow y = \log_3 9 = 2$$

etc., etc.

Al tomar x valores "positivos" cada vez mayores, la función $y = \log_3 x$, irá creciendo también de forma indefinida.

Ejemplo:

$$\text{Para } x = 1 \longrightarrow y = \log_3 1 = 0$$

$$\text{Para } x = 3 \longrightarrow y = \log_3 3 = 1$$

$$\text{Para } x = 9 \longrightarrow y = \log_3 9 = 2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x = \infty \longrightarrow y = \log_3 \infty = \infty$$

Al tomar x valores "positivos", cada vez más cercanos a **cero**, la función $y = \log_3 x$ irá tomando valores cada vez menores, tendiendo a $(-\infty)$, aunque nunca cortará la gráfica, al eje de las "y" (véase figura correspondiente).

Ejemplo:

Para $x = 1 \longrightarrow y = \log_3 1; y = 0$

Para $x = 1/3 \longrightarrow y = \log_3 1/3; y = -1$

Para $x = 1/9 \longrightarrow y = \log_3 1/9; y = -2$

Para $x = 1/27 \longrightarrow y = \log_3 1/27; y = -3$

⋮ ⋮

Para $x = 0 \longrightarrow y = \log_3 \infty; y = -\infty$

Por tanto, una consecuencia del punto anterior, es que al tomar "x" el valor de cero, la función tomará el valor de $-\infty$.

$$x = 0 \rightarrow y = \log_3 0 = -\infty$$

Al tomar "x" el valor de uno, la función $y = \log_3 x$ tomará el valor de cero:

$$x = 1 \rightarrow y = \log_3 1 = 0$$

Al tomar "x" el valor de la base, la función $y = \log_3 x$ tomará el valor de uno.

$$x = 3 \rightarrow y = \log_3 3 = 1$$

Todos estos datos nos dan el estudio completo de la función logarítmica:

$$y = \log_3 x$$

Pero como ya se comentó anteriormente, nos interesan los resultados generales, por ello, el caso concreto $y = \log_3 x$, se va a generalizar para el caso de la función logarítmica $y = \log_3 x$, para todo $a > 1$.

La base de esta función es el número real a positivo y mayor que uno.

Es una función de tipo creciente, es decir, que tomando dos números reales x y x', tales que $x' > x$, se cumple $\log_a x' > \log_a x$:

$$x' > x \Rightarrow \log_a x' > \log_a x$$

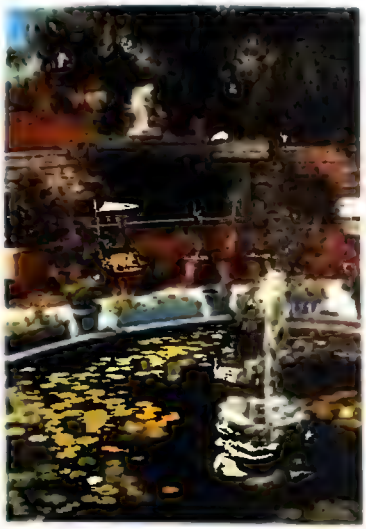
2 °) Para lograr el pos-efecto es imprescindible que la estimulación de uno de los sistemas antagónicos sea lo suficientemente duradera, para que se produzca la **fatiga** en ese sistema antagónico.

Tanto en el pos-efecto **muscular** como en el del **movimiento** o en el del **color** se da el hecho de unas células neurales emparejadas de tal manera que las células que responden de una forma **están en conexión** con las que corresponden de otra, y cuando se produce la **fatiga** en una, a causa de la estimulación prolongada, se pone en funcionamiento la otra, dando lugar al pos-efecto.

Veámoslo en el caso del color.—Sabemos que el receptor rojo está emparejado con el verde, el azul con el amarillo y el negro con el blanco.

En circunstancias normales, cuando está presente la luz blanca, el rojo y el verde, el azul y el amarillo, etc., responden por igual.

Pero, ¿qué ocurre si, por ejemplo, fijamos la vista durante un rato sobre el color rojo? Pues que la célula roja se **fatiga** y pierde por tanto su capacidad de respuesta. Por eso, si fijamos la mirada inmediatamente después sobre el blanco, responderá (se "disparará") el verde, porque su receptor está emparejado con el rojo, del que es complementario.



Cuando no se tiene lo que se quiere, hay que saber querer lo que se tiene.

Séneca

Si lloras porque se oculta el sol, tus lágrimas te impedirán ver el brillo de las estrellas.

Rabindranath Tagore

Es preferible afrontar lo que horroriza que vivir horrorizado toda la vida.

Shakespeare

Más que crear efectos hay que crear intereses.

("Crispín") - *Benavente*

La cortesía es la moneda pequeña de la caridad.

San Francisco de Sales

El placer en el trabajo perfecciona la obra.

Aristóteles

Su campo de existencia es el intervalo $(0, \infty)$, ya que los números negativos no poseen logaritmos.

Al tomar x valores "positivos" cada vez mayores, la función $y = \log_a x$ irá creciendo también de forma indefinida.

Al tomar x valores "positivos", cada vez más cercanos a cero, la función $y = \log_a x$ irá tomando valores cada vez menores, tendiendo a $(-\infty)$, aunque nunca cortará la gráfica al eje de las "y" (véase figura correspondiente).

Como consecuencia del punto anterior, al tomar "x" el valor de 0, la función tomará el valor de $-\infty$.

$$x = 0 \rightarrow y = \log_a 0 = -\infty$$

Al tomar "x" el valor de uno, la función tomará el valor de cero:

$$x = 1 \rightarrow y = \log_a 1 = 0$$

Al tomar "x" el valor de la base, la función $y = \log_a x$ tomará el valor de uno.

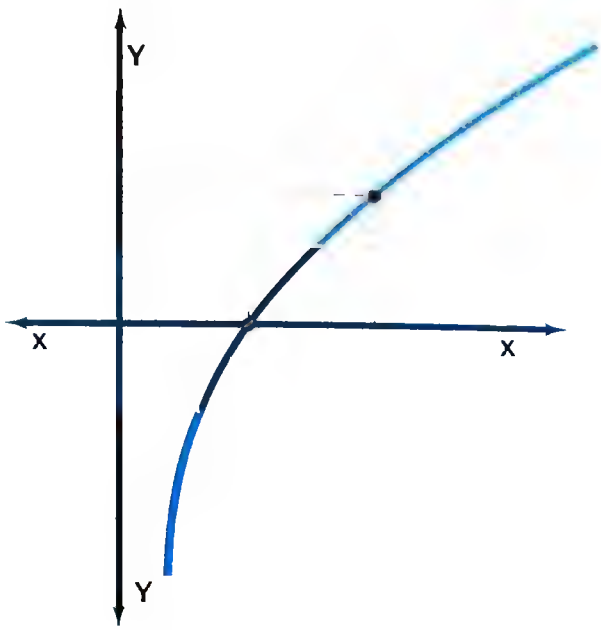
$$x = a \rightarrow y = \log_a a = 1$$

Con lo que se obtiene el siguiente cuadro de valores generales:

$$y = \log_a x$$

x	0	crece	1	a	crece	∞
y	$-\infty$	crece	0	1	crece	∞

Pasamos a representarlos:



7.2.—En este caso, vamos a estudiar la función $y = \log_{1/2} x$, y a fijarnos en su representación gráfica.

La base de esta función logarítmica es el número real, positivo, 1/2.

La gráfica nos está indicando que es una función de tipo decreciente, es decir, al tomar dos números reales x y x', tales que $x' > x$, se cumple $\log_{1/2} x' < \log_{1/2} x$:

$$x' > x \Rightarrow \log_{1/2} x' < \log_{1/2} x\text{: Decreciente}$$

Esto se ve comparando dos puntos de la tabla de valores, realizada anteriormente.

El campo de existencia es el intervalo $(0, \infty)$, ya que, al igual que en el caso anterior, los números negativos no tienen logaritmos.

Ejemplo:

$$\text{Para } x = 2 \longrightarrow \log_{1/2} 2 = y; \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2; 2^{-y} = 2; y = -1$$

$$\text{Para } x = 4 \longrightarrow \log_{1/2} 4 = y; \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2^2; 3^{-y} = 2^2; y = -2$$

etc., etc.

NOTA.—La forma de resolver este ejemplo se verá en un apartado posterior (Ecuaciones Exponenciales); no obstante paso a explicar brevemente cómo se realiza:

Tomemos el caso en que la variable "x" toma el valor de 2.

$\log_{1/2} 2 = y$, recordando el concepto de logaritmo podemos decir que $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 2$;

$$\frac{1^y}{2^y} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2^y} = 2; 2^{-y} = 2$$

Como es una igualdad de potencias donde las bases son las mismas (en este caso el n.º 2), necesariamente para que se cumpla esa igualdad los exponentes tienen que ser los mismos (es decir, iguales).

Por tanto, como tenemos:

$$2^{-y} = 2^1 \Rightarrow -y = 1, \text{ por tanto } y = -1$$

En el caso de que "x" tome el valor de 1 al realizar el proceso, la variable "y" tomará el valor de -2.

Todos estos ejemplos se realizan de la misma forma

Las lámparas fueron usadas por el hombre desde la prehistoria y han ido evolucionando con él mismo.

Antes de J.C. en las tumbas de los reyes se encontraron conchas con sebo y una mecha de pelo o vegetal y más adelante de oro y plata.

Los fenicios tenían lámparas de cerámica y también llenaban de aceite recipientes de cobre y con una mecha los hacían arder.

Los griegos las hacían con un depósito cerrado con dos agujeros para la mecha que ardía y la punta opuesta para la salida de la misma.

Las lámparas colgando del techo se deben a los musulmanes, y en el siglo XIV se usaron los hachones de cera y luego se cambiaron por las velas, y más adelante se usaron lámparas de cristal con muchos picos para que reflejaran la luz y alumbrasen más.

En el siglo XVIII, Quinqué inventó la lámpara que lleva su nombre, y a finales del siglo XIX, en 1878, Edison inventó la lámpara incandescente con la utilización del carbono y el alambre carbonizado. Posteriormente se usaron filamentos metálicos. Siguieron los tubos de neón y los fluorescentes y las lámparas relámpago electrónicas usadas en fotografías ultrarrápidas, y, por último, las lámparas de emisión, que algunas veces a causa de la gran potencia de disipación necesitan que se las refrigere con agua.

Al tomar x, valores "positivos", cada vez mayores, la función $y = \log_{1/2} x$ irá tomando valores cada vez menores, decreciendo de forma indefinida.

Ejemplo:

$$\text{Para } x = 2 \longrightarrow y = \log_{1/2} 2 = -1$$

$$\text{Para } x = 4 \longrightarrow y = \log_{1/2} 4 = -2$$

$$\text{Para } x = 8 \longrightarrow y = \log_{1/2} 8 = -3$$

$$\text{Para } x = 0 \longrightarrow y = \log_{1/2} \infty = -\infty$$

Al tomar x, valores "positivos", cada vez más cercanos al cero, la función $y = \log_{1/2} x$ irá tomando valores cada vez mayores (tendiendo a $+\infty$), aunque nunca cortará al eje de las "y" (véase figura correspondiente).

Ejemplo:

$$\text{Para } x = 1 \longrightarrow y = \log_{1/2} 1;\ y = 0$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \log_{1/2} 1/2;\ y = 1$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{4} \longrightarrow y = \log_{1/2} 1/4;\ y = 2$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{8} \longrightarrow y = \log_{1/2} 1/8;\ y = 3$$

$$x = 0 \longrightarrow y = \log_{1/2};\ y = \infty$$

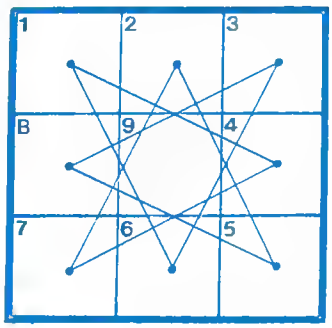
Como consecuencia del punto anterior, tenemos que al tomar "x" el valor de cero, la función tomará el valor de ∞:

$$x = 0 \rightarrow y = \log_{1/2} 0 = \infty$$

Al tomar "x" el valor de uno, la función $y = \log_{1/2} x$ tomará el valor de cero:

$$x = f \rightarrow y = \log_{1/2} f = 0$$

SOLUCION A LOS SALTOS DE CABALLO DE AJEDREZ DE LA PAGINA 713



Salto del n.º 1; del 1 al 4; al 7; al 2 y al 5
Salto del n.º 3; del 3 al 6; al 1; al 4 y al 7
Salto del n.º 7; del 7 al 2; al 5; al 8 y al 3
Salto del n.º 5; del 5 al 8; al 3; al 6 y al 1

O sea, nos sale un "polígono estrellado".

Al tomar "x" **el valor de la base,** la función $y = \log_{1/2} x$ tomará el valor de uno:

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \log_{1/2} 1/2 = 1$$

Todos estos datos nos dan el estudio completo de la función logarítmica:

$$y = \log_{1/2} x$$

Este ejemplo concreto se generaliza para el caso de la función logarítmica $y = \log_a x$, para todo $0 < a < 1$.

La base de la función es el número real a, positivo y **menor** que uno.

Es una función decreciente, pues al tomar dos números reales x' y x, tales que $x' > x$, se cumple $\log_a x' < \log_a x$:

$$x' > x \Rightarrow \log_a x' < \log_a x\text{: Decreciente}$$

Su campo de existencia es el intervalo $(0, \infty)$, pues los números negativos no poseen logaritmos.

Al tomar "x" valores **positivos** cada vez mayores, la función $y = \log_a x$ irá tomando valores cada vez menores, decreciendo de forma indefinida.

Al tomar "x" valores positivos cada vez más cercanos a cero, la función $y = \log_a x$, tomando valores cada vez menores, tendiendo a $-\infty$, aunque la gráfica no cortará nunca al eje de las "y".

Como consecuencia del punto anterior, al tomar "x" **el valor de cero,** la función tomará el valor de ∞:

$$x = 0 \rightarrow y = \log_a 0 = \infty$$

Al tomar "x" **el valor de uno,** la función tomará el valor de cero:

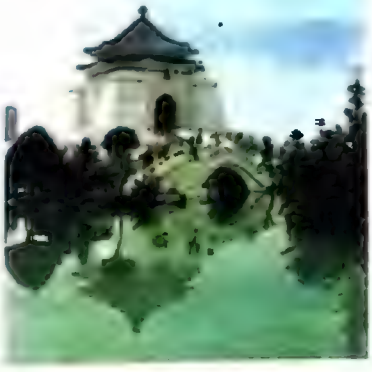
$$x = 1 \rightarrow y = \log_a 1 = 0$$

Al tomar "x" el valor de la base, la función $y = \log_a x$, tomará el valor de uno:

$$x = a \rightarrow y = \log_a a = 1$$

Con todos estos datos obtenemos el siguiente cuadro de valores generales para la función

$$y = \log_a x \qquad a < 1$$



MATEMATICAS CHINAS

Quizá sea el pueblo chino el que nos ha dejado, si no los mejores, sí más cantided de testimonios de esta ciencia, por medio de inscripciones, manuscritos y sorprendentemente **libros impresos.**

Los primeros vestigios datan del siglo XIV antes de J.C. Con claros dominios de la Aritmética, el sistema de numeración usado era el decimal y con muy pequeñas desviaciones del sisteme decimal actual, notándose mucha semejanza con las matemáticas árabes y griegas.

En el siglo III antes de J.C. tenían calculado el número π, dando también una singular adaptación del **Taorema de Pitágoras.** Como notable curiosidad, realizaban el cálculo de ecuaciones de primer grado sobre un **tablero de ajedrez.**

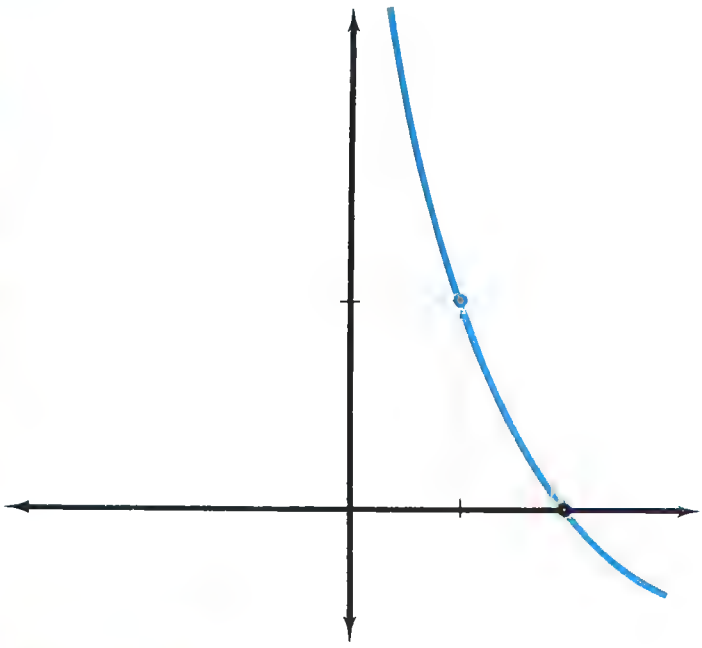
Los números empleados por los chinos eran del 1 al 9 hasta el siglo VIII de nuestra era, en la que ya apareció el 0.

El gran siglo de esplendor de la cultura china fue el XII, en el que apareció el Algebra.

Posteriormente, y debido a invasiones de este pueblo, la actividad matemática se fue reduciendo hasta perderse el estudio de investigación.

x	0	crece	a	1	crece	∞
y	∞	decrece	1	0	decrece	$-\infty$

Representamos:



OBSERVAR EL SOL (1)

Para mirar el Sol, y no sólo directamente sin anteojos, hemos avisado muy esencialmente de los peligros que conlleva, y más aún a través de un instrumento óptico. Tomando las debidas precauciones podemos observarlo, aunque con bastantes interrupciones, ya que de lo contrario podemos perder la visión por un momento e incluso podemos llegar a la ceguera. PRECAUCION.

Existen unos prismas especialmente fabricados para la observación del Sol e incluso en algunos telescopios hay una pantalla sobre la que se puede proyectar la imagen del Sol, y esta imagen, al ser indirecta, la podemos observar cómodamente sin peligro alguno. Que no trate el aficionado de hacerse filtros él mismo, ya que si no logra la suficiente protección o que este filtro se parta, recibirá la luz concentrada y directamente en el ojo.

NO FABRIQUES LENTES.

8.–PROBLEMAS

Problema.–Dada la función $y = \log_3 x$, calcular el valor de la imagen (y) cuando "x" toma los valores (1/3, 1/9, 9).

Solución

Para $x = \frac{1}{3} \rightarrow y = \log_3 \frac{1}{3}$; $3^y = \frac{1}{3}$; $3^y = 3^{-1}$

$$y = -1$$

Para $x = \frac{1}{9} \rightarrow y = \log_3 \frac{1}{9}$; $3^y = \frac{1}{3^2}$; $3^y = 3^{-2}$

$$y = -2$$

Para $x = 9 \rightarrow y = \log_3 9$; $3^y = 9$; $3^y = 3^2$

$$y = 2$$

Cuadro de valores: $y = \log_3 x$

x	1/3	1/9	9
y	−1	−2	2

Problema.—Dada la función $y = \log_5 x$, calcular el valor de la variable independiente (x), cuando "y" toma los valores (0, 1, 2, −1).

Solución

Para $y = 0 \rightarrow 0 = \log_5 x;\ 5^0 = x$

$$x = 1$$

Para $y = 1 \rightarrow 1 = \log_5 x;\ 5^1 = x$

$$x = 5$$

Para $y = 2 \rightarrow 2 = \log_5 x;\ 5^2 = x$

$$x = 25$$

Para $y = -1 \rightarrow -1 = \log_5 x;\ 5^{-1} = x$

$$x = \frac{1}{5}$$

Cuadro de valores; $y = \log_5 x$

y	0	1	2	−1
x	1	5	25	1/5

Problema.—Dada la función $y = \log_{1/5} x$, realizar la representación gráfica.

Para ello damos a la variable "x" una serie de valores (1/25; 1/5; 1; 5; 25).

Para $x = \frac{1}{25} \rightarrow y = \log_{1/5} 1/25; \left(\frac{1}{5}\right)^y = \frac{1}{25};\ 5^{-y} = 5^{-2}$

$$y = 2$$

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS".

La obra se ofrece con **bastantes espacios en blanco, EMPLEANDO EN CADA PAGINA UN TAMAÑO DE LETRA grande** y un papel de primera calidad. Esto lo hacemos con toda intención, ya que sabemos que demasiadas letras por página y de pequeño tamaño predisponen negativamente al niño, pues le producen tensión, sensación de angustia y deseos de abandonar una lectura incómoda.

De 361 millones de Km² con que cuenta la superficie marina, la mitad aproximadamente (180 millones de Km²) pertenece al Océano Pacífico. Este gran Océano baña las costas de Australia, Asia y América. Aunque tenga un poco menos de la mitad de la superficie del total marino, tiene en cambio más de la mitad del volumen total de los mares y océanos (725 millones de Km³, sobre 1.370 millones de Km³); quiere decirse y está demostrado que es el Océano más profundo. Tiene fondo marino basáltico. Con islas volcánicas y también con fosas abisales estrechas y alargadas donde se encuentran las mayores profundidades conocidas, 10.960 m. en las fosas de las Marianas.

Es curioso y a la vez demostrativo de que todas las fosas y anomalías van asociadas a un sistema volcánico con terremotos de origen profundo cuyos hipocentros están allí delimitados.

Estos terremotos, muy frecuentes, generan unas ondas llamadas "solitarios" que al llegar a las costas causan considerables estragos. En Japón a estas ondas las denominan "trunamis" o anlquiladoras.

Para $x = \frac{1}{5} \rightarrow y = \log_{1/5} 1/5; \left(\frac{1}{5}\right)^y = \frac{1}{5}; 5^{-y} = 5^{-1}$

$$y = 1$$

Para $x = 1 \rightarrow y = \log_{1/5} 1; \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1$

$$y = 0$$

Para $x = 5 \rightarrow y = \log_{1/5} 5; \left(\frac{1}{5}\right)^y = 5; 5^{-y} = 5^1$

$$y = -1$$

Para $x = 25 \rightarrow y = \log_{1/5} 25; \left(\frac{1}{5}\right)^y = 25; 5^{-y} = 5^2$

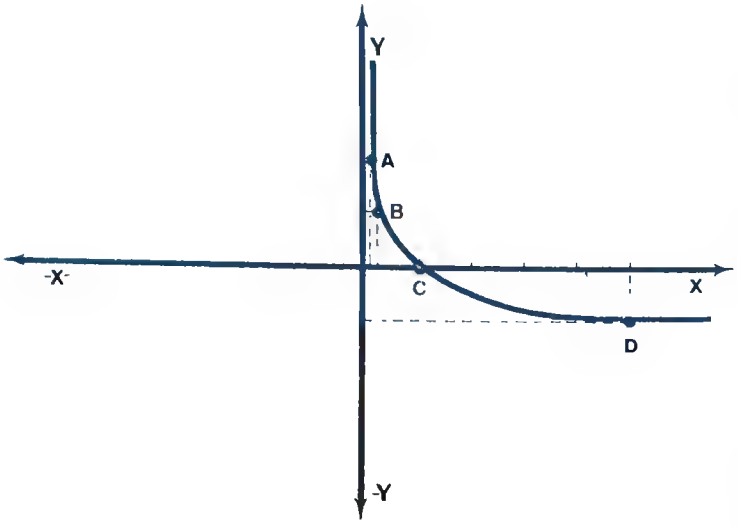
$$y = -2$$

Realizamos el cuadro de valores:

$$y = \log_{1/5} x$$

	A	B	C	D
x	1/25	1/5	1	5
y	2	1	0	−1

Representamos:



9.–DEFINICION DE LOGARITMO: PROPIEDADES Y OPERACIONES

Lo primero que tenemos que hacer es definir qué es el logaritmo de un número en una base dada; pues bien, el logaritmo de "x" en base "a" se puede definir como el número "y" al que es preciso elevar la base "a" para obtener "x":

$$x = a^y$$

$$\log_a x = y$$

Según que la base "a" sea mayor o menor que la unidad el sistema de logaritmos tendrá unas propiedades u otras.

Sea la base mayor que la unidad ($a > 1$), las propiedades serán:

a) El logaritmo de 1 será igual a cero:

$$\log_a 1 = 0$$

b) El logaritmo de la base será la unidad

$$\log_a a = 1$$

c) Los números menores que la unidad tienen logaritmos negativos:

$$\text{Si } x < 1 \qquad \log_a x < 0$$

d) Los números mayores que la unidad tienen logaritmos positivos:

$$\text{Si } x > 1 \qquad \log_a x > 0$$

e) El logaritmo de cero vale menos infinito:

$$\log_a 0 = -\infty$$

f) Los números negativos no tienen logaritmo.

g) El logaritmo de un número que es una potencia exacta de la base es siempre igual al exponente:

$$\text{Si } x = a^y \qquad \log_a(a^y) = y$$

Cuando la base "a" es menor que la unidad, algunas de estas propiedades cambian ($a < 1$):

a) El logaritmo de 1 continúa siendo 0.

b) El logaritmo de a continúa siendo 1.

c) Los números menores que la unidad tienen ahora logaritmo positivo:

$$\text{Si } x < 1 \qquad \log_a x > 0$$

Tanto la inteligencia humana como la animal dependen del sistema nervioso, aunque la primera es muy superior a la segunda, ya que ésta es únicamente sensorial o dependiente de los sentidos y en el hombre la creación de relaciones se da de forma intelectual, y por medio del lenguaje y otros conceptos y sin necesidad de los sentidos podemos crear imágenes, con lo que se crea un mundo interior muy superior al exterior y se puede colocar tanto en el pasado como en el presente o el futuro.

A lo largo de los años, diversos sabios y pensadores se han esforzado por medir la inteligencia de los seres humanos, creándose distintas teorías, de las que destacan el método que se emplea en la actualidad, consistente en análisis de distintos factores distintos entre sí. Este método fue creado por THURSTONO y posteriormente lo perfeccionó GUILFORD, quien demuestra que existen 120 posibilidsdes de combinaciones referentes a un tipo distinto de actividad mental.

Según el CI (Cociente de Inteligencia), los individuos que tengan menos de 70 son deficientes mentales, idiotas, etc.; de 80 a 90, normal mediocre; de 90 a 109, normal medio, y es el de la mitad de la población; de 109 a 119, normal superior; de 120 a 130, superior, y luego se pasa a los superdotados, que a lo mejor es el caso de alguno de vosotros. Enhorabuena.

Zeus, enfurecido con Prometeo por haber entregado el fuego sagrado a los mortales, ordenó a Hefestos que crease una mujer con tales encsntos que fuera capaz de labrar la ruina al género humano.

Hefestos, con tierra arcillosa, modeló una mujer, la cual era tan perfecta que le concedió la vida. Así nació una mujer a la que dio el nombre de "Pandora", que significa "poseedora de todos los dones y virtudes". Epimeteo, hermano de Prometeo, desoyendo todos los consejos de su hermano, se desposó con Pandora. Esta, ya entre los mortales, abrió una caja que contenía todos los males y éstos se derramaron sobre la Tierra, quedando solamente en el fondo de la caja la Esperanza. Este mito es el conocido por la "Caja de Pandora".

Moraleja: Quizá esto nos enseñe que la Tierra nos ofrece generosamente todo cuanto posee, pero que existen cosas que, aun teniendo buena apariencia, pueden ocasionar o ser origen de grandes cslamidades.

d) Los números mayores que la unidad tienen ahora logaritmo negativo:

$$\text{Si } x > 1 \qquad \log_a x < 1$$

e) El logaritmo de 0, en este caso, es más infinito.

$$\log_a 0 = +\infty$$

f) Los números negativos continúan sin tener logaritmo

g) La última propiedad tampoco varía y cuando el número es potencia exacta de la base el logaritmo es igual al exponente.

$$\text{Si } x = a^y \qquad \log_a a^y = y$$

Una vez definido el logaritmo de un número en una base dada pasaremos a definir el **antilogaritmo.**

Podemos definir el antilogaritmo como el número que corresponde a un logaritmo dado:

$$\text{Si } \log_a x = z \qquad \text{antilogaritmo } z = x$$

Ej.: Calcular el $\log_4 2$.

Por la definición de logaritmo de un número en una base dada podemos poner que:

$$\log_4 2 = y$$

$$2 = 4^y$$

Como $4 = 2^2$ podemos poner:

$$2 = (2^2)^y$$

Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes y queda:

$$2 = 2^{2y}$$

Como en los dos miembros las bases son iguales para que se cumpla la igualdad, los exponentes también tienen que ser iguales.

Luego:

$$1 = 2y$$

Despejando

$$y = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

¿Cuál será en este caso el antilogaritmo de 1/2?

Simplemente por la definición de antilogaritmo podemos afirmar que

$$\text{antilog}\,\frac{1}{2} = 2$$

Una vez vistas las propiedades de los logaritmos pasamos a ver las posibles operaciones que podemos realizar con ellos.

A.—Logaritmo de un producto

El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de dichos números.

Demostración:

Sean

$$\log_a M = X \qquad y \qquad \log_b N = Y$$

Por definición:

$$M = a^x \qquad y \qquad N = a^y$$

Si las multiplicamos tenemos:

$$M \times N = a^x \cdot a^y$$

Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes:

$$M \times N = a^{x+y}$$

De donde por la definición de logaritmos podemos sacar que:

$$\log_a (M \times N) = x + y$$

Como x e y son los respectivos logaritmos de M y N podemos poner:

$$\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$$

B.—Logaritmo de un cociente

El logaritmo del cociente entre dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

Demostración: Seguiremos el mismo procedimiento que en el caso anterior:

$$\log_a M = X \qquad y \qquad \log_a N = Y$$

Por definición:

$$M = a^x \qquad y \qquad N = a^y$$

En una grsn ciudad, un estudiante que camina por una calle a una velocidad de 8 Km. por hora, observa que, mientras 8 autobuses de la misma línea se han cruzado con él, 6 se le han adelantado. Imaginando que la velocidad de los autobuses es uniforme, calcular la velocidad.

La solución en pág. 768.

LA MEMORIA

por Bernabé Tierno

Dice Neisser: "El proceso de información detecta y selecciona (atención); reconoce y elabora (percepción); almacena y recupera (memoria y aprendizaje), y utiliza (conducta)".

Los diferentes investigadores distinguen al menos **tres** tipos de memoria absolutamente diferentes:

Almacenamiento de información sensorial (pre-atención)

Es un depósito de estimulación que dura un cortísimo espacio de tiempo (de 1 a 5 segundos). Dura más la percepción del estímulo que el estímulo mismo como demostró SPERLING (1960) y AVERBACH y CORIELL (1961).

El tiempo óptimo va de menos de 1 segundo a 1/2 segundo.

Ejercicios experimentales

Cierra los ojos y ábrelos rápidamente. Verás que la imagen en ese "abrir y cerrar de ojos" se detiene un momento y luego desaparece lentamente.

Escucha el agudo pitido del silbato del árbitro. Ese sonido tan preciso dura sólo unos instantes en tu memoria.

Continúa en la página siguiente.

Dividiendo las dos expresiones:

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y}$$

Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes:

$$\frac{M}{N} = a^{x-y}$$

Por la definición de logaritmo:

$$\log_a \frac{M}{N} = x - y$$

Sustituyendo "x" e "y" por sus valores, tenemos:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

C.–Logaritmo de una potencia

El logaritmo de la potencia de un número es igual al producto del exponente por el logaritmo del número que constituya la base de la potencia.

Demostración:

Sea $\log_a M = x$

Por definición:

$$M = a^x$$

Si elevamos los dos miembros a una potencia cualquiera "u" tendremos:

$$M^u = (a^x)^u$$

Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes:

$$M^u = a^{xu}$$

Por la definición de logaritmo:

$$\log_a M^u = xu$$

Sustituyendo x por su valor nos queda:

$$\log_a M^u = u \cdot \log_a M$$

D.– Logaritmo de una raíz

El logaritmo de la raíz de índice "n" de un número es igual al logaritmo de dicho número partido por el índice de la raíz.

Demostración:

Sea $$\log_a M = x$$

Por definición:

$$M = a^x$$

Sacamos la raíz n-sima de los dos miembros:

$$\sqrt[n]{M} = \sqrt[n]{a^x}$$

Para sacar a^x fuera de la raíz dividimos el exponente de la potencia entre el índice de la raíz:

$$\sqrt[n]{M} = a^{x/n}$$

Por la definición del logaritmo de un número:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{x}{n}$$

Sustituyendo x por su valor ya indicado en la primera expresión nos queda:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

Estas operaciones no siempre se presentan de forma aislada, sino que frecuentemente se presentan juntas. Veamos algunos ejemplos:

Ej.: Desarrollar $$\log_a \frac{A^3 \sqrt[2]{C}}{B^2}$$

Primero quitamos el cociente:

$$\log_a \frac{A^3 \sqrt[2]{C}}{B^2} = \log_a (A^3 \sqrt[2]{C}) - \log_a B^2$$

Del primer logaritmo eliminamos el producto:

$$\log_a \frac{A^3 \sqrt[2]{C}}{B^2} = \log_a A^3 + \log_a \sqrt[2]{C} - \log_a B^2$$

Del segundo logaritmo quitamos la raíz:

$$\log_a \frac{A^3 \sqrt[2]{C}}{B^2} = \log_a A^3 + \frac{1}{2} \log_a C - \log_a B^2$$

Cuando das un fuerte apretón de manos para saludar a un amigo, observarás que sólo logras retener unos segundos la sensación real de la presión sobre la mano.

Como ves, por los ejercicios realizados, el depósito de estimulación dura breves segundos.

Memoria a corto plazo
(Atención) - Repetición

Es un almacenamiento de duración más larga (varios segundos a varios minutos). Es consciente y voluntaria. Es un proceso de atención y depende de la **repatición**.

La memoria a corto plazo **retiene** la **interpretación inmediata** de los acontecimientos. Una cosa es **recordar** la **imagen** de los acontecimientos y otra muy destinta es la **interpretación** de los mismos.

Si te dicen un teléfono al oído o la dirección de una persona, puedes retenerlas en tu memoria a corto plazo, pero no olvides que su capacidad es muy limitada, y si quieres seguir recordando ese teléfono o dirección deberás hacer un esfuerzo consciente y **repetirlos** mentalmente variss veces hasta que formen parte de la memoria a largo plazo.

Memoria a largo-plazo
(Memoria propiamente dicha)

Es el más complejo e importante sistema de memoria. En la práctica, no parece haber un límite en cuanto a la capacidad de la memoria a largo plazo. Recordemos que cada neurona (de los diez billones de neuronas de nuestro cerebro) es capaz de almacenar gran cantidad de información y no olvidemos tampoco la tremenda cantidad de información que pueden almacenar moléculas gigantes como el A R N (ácido ribonucleico).

La memoria a largo plazo necesita del esfuerzo y la laboriosidad. Todas las cosas que retienes durante más de unos minutos, horas, días, etc., se almacenan en la memoria a largo-plazo.

Verás claramente que la cantidad de almecenamiento en la memoria a largo-plazo es tan ingente que debiéramos vernos imposibilitados de encontrar cualquier cosa entre tantos miles y miles de hechos, fechas, nombres, conceptos, etc. Sin embargo es algo bastante fácil.

Un niño de 7 años, que realice una lectura comprensiva (algo corriente y sencillo), deberá interpretar los significados de los símbolos de la página escrita "bebiendo" directamente de su memoria a largo plazo.

Del primero y tercer logaritmo eliminamos las potencias:

$$\log_a \frac{A^3 \sqrt[2]{C}}{B^2} = 3 \log_a A + \frac{1}{2} \log_a C - 2 \log_a B$$

Como se ve, lo único que se ha hecho es aplicar a la expresión de partida las propiedades de las operaciones con logaritmos descritas anteriormente.

Ej.: Sea la expresión a desarrollar:

$$\log_a \frac{41}{3} \pi r^3$$

En este caso se nos plantea el logaritmo del producto entre tres términos, aplicando el logaritmo de un producto tendremos.

$$\log_a \frac{41}{3} \pi r^3 = \log_a \frac{41}{3} + \log_a \pi + \log_a r^3$$

Aplicando en el primer logaritmo el logaritmo de un cociente nos queda:

$$\log_a \frac{41}{3} \pi r^3 = \log_a 41 - \log_a 3 + \log_a \pi + \log_a 3^3$$

Aplicando sobre el logaritmo que ocupa el último lugar en el desarrollo el logaritmo de una potencia, tendremos que:

$$\log_a \frac{41}{3} \pi r^3 = \log_a 41 - \log_a 3 + \log_a \pi + 3 \log_a r$$

Ej.: Reducir a sus orígenes la expresión:

$$[3 \log_a C - \frac{1}{2} \log_a B] + [\log_a M + \frac{4}{5} \log_a Z]$$

Aplicando logaritmos de una potencia quedaría:

$$[\log_a C^3 - \log_a B^{1/2}] + [\log_a M + \log_a Z^{4/5}]$$

Aplicamos el logaritmo de una raíz sobre todos los que tengan exponente fraccionario.

$$[\log_a C^3 - \log_a \sqrt[2]{B}] + [\log_a M + \log_a \sqrt[5]{Z^4}]$$

Como el logaritmo de un producto es la suma de logaritmos el segundo corchete queda:

$$[\log_a C^3 - \log_a \sqrt[2]{B}] + \log_a (M \cdot \sqrt[5]{Z^4})$$

Como el logaritmo de un cociente es la diferencia de logarit-

mos el primer corchete quedaría:

$$\log_a \frac{C^3}{\sqrt[2]{B}} + \log_a M\sqrt[5]{Z^4}$$

Aplicando otra vez el logaritmo de un producto, la primitiva expresión quedaría reducida a:

$$\log_a \frac{C^3 \cdot M \cdot \sqrt[5]{Z^4}}{\sqrt[2]{B}}$$

10.—ECUACIONES EXPONENCIALES

Se denominan ecuaciones exponenciales aquellas en las cuales la incógnita se encuentra en el exponente:

Ej.: $2^x = 10,\ 10^x - 10^{-x} = 2$, etc.

Este tipo de ecuaciones se soluciona por simple observación transformando la ecuación hasta lograr que la base de los dos miembros se iguale, una vez que están igualadas necesariamente tendrán que igualarse los exponentes, una vez realizada la igualación nos quedará una ecuación con una sola incógnita de fácil resolución.

Ej.: Sea la ecuación:

$$2^x = 16$$

como $16 = 2^4$ podemos afirmar que

$$2^x = 2^4$$

como los dos miembros tienen la misma base los exponentes tienen que igualarse, con lo que nos queda

$$x = 4$$

Hay un segundo método para la resolución de estas ecuaciones que consiste en la toma de logaritmos en ambos miembros de la igualdad. Estos logaritmos se pueden tomar en cualquier base. No obstante en matemáticas, de forma general, cuando se toman logaritmos y no se especifica qué base deben tener, se toma como base el número 10 (logaritmos decimales). Por convenio estos logaritmos se escriben sin poner la base.

Ej.: $\text{Log}_{10}5$ se debe de escribir log 5.

Tomemos el mismo ejemplo que antes para comprobar que los resultados obtenidos por los dos métodos son los mismos.

COMPRUEBA POR TI MISMO TU MEMORIA

Di a tu compañero que te lea una lista de 5 ó 6 nombres de objetos, por ejemplo: libro, mechero, cartera, reloj, mesa... Repítelas por orden, inmediatamente después una o dos veces. Olvídate durante diez o quince minutos de esas palabras y trata de repetirlas de nuevo y por orden. Si lo consigues, tu memoria es buena.

Haz lo mismo con seis o siete cifras: 7, 3, 5, 9, 6, 8, 4.

Memoria por asociación.— Pide a un amigo que prepare una lista de doce a quince palabras evocadoras de otras con las que puedan fácilmente relacionarse y después que te las dicte de dos en dos. A continuación sólo te dirá la 1.ª palabra y tu responderás por la asociada correspondiente. Anota las respuestas correctas. Repite el mismo ejercicio dos días más tarde, una semana y un mes después, con el fin de medir tu memoria asociativa.

Este es un buen ejercicio competitivo de memoria para hacerlo entre unos cuantos amigos.

A continuación te doy un ejemplo de palabras asociadas, pero tú puedes idear otros muchos.

Fruta	—	pera
motor	—	coche
cárcel	—	preso
cura	—	monja
manos	—	pies
papel	—	lápiz
fuente	—	agua
mar	—	playa
profesor	—	alumno
radio	—	televisión
árbol	—	ramas
flor	—	rosa
fiera	—	tigre
bebida	—	vino
madre	—	hijo
día	—	noche
hoy	—	mañana

COMO FUNCIONAN LAS DOS MEMORIAS

(A **corto** y **largo** plazo)

Gracias a la memoria a **corto-plazo** logramos escamotear toda una ingente serie de fechas, números, palabras, caras, etc., que si llenasen nuestra mente nos volverían loco. Sin embargo, podemos estar bien seguros que los recuerdos de la memoria a largo-plazo no pueden ser borrados por ningún lavado de cerebro, ni electroshock, ni drogas. Ya veremos cómo el electroshock puede afectar a la memorie a **corto-plazo**, pero no a la de largo-plezo (ver experimento del choque electroconvulsivo).

Sabemos también que el cerebro sólo registra y retiene aquellos hechos que son **repetidos.** Su proceso es el siguiente: evocar, repetir, seleccionar y registrar.

El ritmo de repetición de cada palabra para su óptima retención debe ser de seis segundos por palabra (tiempo ideal para que tenga lugar el mecanismo de repetición interior).

Cuando esté afectado el hipocampo, el depósito de recuerdos antiguos (a largo plazo) queda intacto y puede dar una buena memoria a corto-plazo. Sin embargo, no pueden fijarse acontecimientos nuevos.

Otro tanto ocurre a **los etílicos,** ya que centros como la formación hipocampomamilar son afectados por el alcohol. Por eso el etilismo favorece el olvido de las preocupaciones, pero también el paulatino olvido de todo lo demás. Recordemos que el hipocampo tiene como papel **fijar** la informaclón reinyectándola en los circuitos del cerebro.

Ej.: Sea la ecuación: $2^x = 16$

Como $16 = 2^4 \Rightarrow 2^x = 2^4$

Tomando logaritmos: $\log 2^x = \log 2^4$

Aplicando el logaritmo de una potencia:

$$x \log 2 = 4 \log 2$$

Despejando $x \Rightarrow x = 4 \dfrac{\log 2}{\log 2}$

Como $\dfrac{\log 2}{\log 2}$ es igual a la unidad.

$$x = 4$$

Ej.: Resolver la siguiente ecuación exponencial por los dos métodos:

$$\frac{(1{,}04)^{x-1}}{0{,}02} = 52$$

Quitamos el denominador, pasándolo multiplicando, al segundo miembro.

$$(1{,}04)^{x-1} = 52 \times 0{,}02 = 1{,}04$$

1.er método

$$1{,}04^{x-1} = 1{,}04$$

Como las bases son iguales, igualamos los exponentes:

$$x - 1 = 1$$

Despejando x:

$$x = 2$$

2.º método

$$1{,}04^{x-1} = 1{,}04$$

Tomamos logaritmos:

$$\log 1{,}04^{x-1} = \log 1{,}04$$

Aplicando el logaritmo de una potencia:

$$(x - 1) \log 1{,}04 = \log 1{,}04$$

Despejamos $(x - 1)$:

$$x - 1 = \frac{\log 1{,}04}{\log 1.04}$$

$$x - 1 = 1$$

Despejando x:

$$x = 2$$

Las ecuaciones exponenciales y fundamentalmente este segundo método para su resolución serán estudiados más ampliamente en temas posteriores cuando se adquieran ciertos conocimientos imprescindibles.

Veamos algún ejemplo más de aplicación de las ecuaciones exponenciales.

Ej.: Hallar los originales de 27, 1/9, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{3}{9}}$ respecto de la función exponencial de base 3:

$\Rightarrow$ Para $y = 27 \rightarrow f(x) = 3^x = 27$

Nos queda una ecuación exponencial de fácil solución. Como $27 = 3^3$ podemos afirmar que:

$$3^x = 3^3$$

Igualando exponentes:

$$x = 3$$

Por el 2.º método tomaríamos logaritmos:

$$\log 3^x = \log 3^3$$

Aplicando logaritmo de una potencia:

$$x \log 3 = 3 \log 3$$

Despejando x:

$$x = 3 \frac{\log 3}{\log 3}$$

$$x = 3$$

$\Rightarrow$ Para $y = 1/9 \rightarrow f(x) = 3^x = 1/9$

Como $9 = 3^2$ podemos poner:

$$3^x = \frac{1}{3^2}$$

El 3^2 puede pasar al numerador cambiando de signo al exponente:

$$3^x = 3^{-2}$$

¿Dónde se almacena la información en la memoria a largo-plazo?.—Se almacena en las moléculas de A.R.N. (ácido ribonucleico) que transmite la herencia. Según esto, la memoria **biológica** y la memoria **psicológica** están registradas en el mismo código químico. Ya lo vimos anteriormente.

Por otra parte, en la memoria está implicado el encéfalo completo. La información se fija en millones de neuronas al mismo tiempo y cada experiencia afecta al encéfalo en pleno, a toda la personalidad del sujeto. Varios experimentos avalan esta afirmación:

El profesor H. F. Harlow, de EE. UU., aisló a unos monos de toda clase de estímulos, desde su nacimiento, y los mantuvo en plena oscuridad, sin que pudieran apenas tener experiencias. El **resultado** fue que quedó afectado **el cerebro** casi en su totalidad. Cuando los monos volvieron a un ambiente normal de estímulos, se comportaron muy torpemente y su capacidad a todos los niveles había quedado muy limitada.

También el profesor R. Rosenzwerg, de la Universidad de California (Berkeley), experimentó con dos grupos de ratas. A unas las entrenó con toda clase de estímulos y experiencias y a otras las aisló desde su nacimiento, privándolas de experiencias. **Resultado:** Las ratas con múltiples y variadas experiencias tenían un cerebro un poco más pesado, con neuronas de mayor tamaño y sobre todo con mayor número de conexiones que las ratas que habían permanecido aisladas. Eran ratas con mejor memoria y más listas.

Concluiremos, pues, que en la memoria está implicado todo el encéfalo.

Kong-Fu-Tsé, a quien los jesuitas dieron el nombre latinizado de Confucio, fue un filósofo y moralista extraordinario y un profundo tratadista político.

Nació en el año 551 antes de Jesucristo, en China, Estado de Lu. Su familia gozaba de una distinguida posición. Muy precoz y estudioso, visitó y aprendió de los sabios de su época. Quiso remediar la decadencia del pueblo chino y de sus estudios y meditaciones sacó en consecuencia que había que volver a las costumbres antiguas. Fue ministro consejero del Príncipe de Lu e hizo prosperar aquel Estado. Pero a los cincuenta y cuatro años cayó en desgracia y entonces no dudó en volver a una vida sencilla y a emprender como en su juventud viajes de estudio. Murió a los setenta y tres años.

Confucio consagra el culto a los antepasados, predica un disfrute sin exceso de los bienes de la Tierra.

Pocos pensadores han obtenido un éxito tan rotundo como este sabio. Su doctrina llegó a imponerse y orientó felizmente la vida de su país durante dos mil quinientos años, hasta 1911. Tuvo muchos discípulos. Tchufu-Tse fue el que dio a las doctrinas de Confucio una forma religiosa y fue seguida rápidamente por los letrados y por los mandarines.

Según el 1.er método de igualación de exponente:

$$x = -2$$

Según el 2.º método de toma de logaritmos:

$$\log 3^x = \log 3^{-2}$$

Según el logaritmo de una potencia:

$$x \log 3 = (-2) \log 3$$

Despejando x:

$$x = (-2)\frac{\log 3}{\log 3}$$

$$x = -2$$

$\Rightarrow$ Para $y = \sqrt{3} \rightarrow f(x) = 3^x = \sqrt{3}$

Podemos eliminar la raíz sacando el 3 elevado a su exponente partido por el índice de la raíz, de tal forma que la ecuación nos quedaría.

$$3^x = 3^{1/2}$$

Por el primer método igualamos los exponentes y nos queda.

$$x = \frac{1}{2}$$

Por el segundo método tomamos logaritmos:

$$\log 3^x = \log 3^{1/2}$$

Aplicando logaritmo de una potencia:

$$x \log 3 = \frac{1}{2} \log 3$$

Despejando x:

$$x = 1/2 \frac{\log 3}{\log 3}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Para $y = \sqrt{\frac{3}{9}} \rightarrow f(x) = 3^x = \sqrt{\frac{3}{9}}$

Como $9 = 3^2$ podemos poner la ecuación como:

$$3^x = \sqrt{\frac{3}{3^2}}$$

Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes y se pone en el lugar que ocupe la potencia de mayor exponente, en nuestro caso en el denominador:

$$3^x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

La raíz de un cociente es igual al cociente de raíces:

$$3^x = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$$

Eliminamos las raíces de la misma forma que en el caso anterior:

$$3^x = \frac{1}{3^{1/2}}$$

Pasamos el $3^{1/2}$ al numerador cambiando de signo al exponente:

$$3^x = 3^{-1/2}$$

Por el 1.er método igualamos los exponentes:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Por el 2.º método tomaríamos logaritmos:

$$\log 3^x = \log 3^{-1/2}$$

Por el logaritmo de una potencia:

$$x \log 3 = (-\frac{1}{2}) \log 3$$

Despejando x:

$$x = (-\frac{1}{2}) \frac{\log 3}{\log 3}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Ej.: Resolver las ecuaciones exponenciales:

a) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

Solución al problema del papel quemado de la página 727

Vamos a ir solucionando el problema por partes. Vemos que la cifra de las unidades es cuatro (en la suma); seis multiplicando por la primera cifra del multiplicando (unidad) tiene que terminar en 4, sólo puede ser 4 y 9. Al ser el cuatro (seis por cuantro venticuatro y llevamos dos), seis por dos (decena de multiplicando) son doce, más dos que nos llevamos serían catorce (un cuatro), pero como nos tiene que dar un siete: NO PUEDE SER CUATRO. Con el número nueve sí nos resulta, ya que seis por nueve son cincuenta y cuatro y llevamos cinco, seis por dos son doce y cinco diecisiete, se cumple, luego ya tenemos la primera cifra de la unidad del multiplicando: 9, y nos queda:

$$\begin{array}{r} \bullet\ 2\ 9 \\ \times\ 4\ \bullet\ 6 \\ \hline \bullet\ 1\ 7\ 4 \\ 1\ \bullet\ 8\ \bullet \\ \bullet\ 1\ 1\ 6 \\ \hline 2\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ 4\ 4 \end{array}$$

Continúa en la página siguiente.

En el multiplicando vamos a ver si sacamos la cifra de las centenas y en función de las centenas del multiplicador (del 4). Vemos que el último número de la suma total de la operación es un dos y con la suma de las dos cifras anteriores (uno más uno) no podemos llevarnos ninguna. entonces al multiplicar cuatro por el punto debe de dar veinte y algo y que al llevarnos una debe de ser VEINTE, y en el único número que se cumple es en el CINCO, y así ya tenemos

```
      5 2 9
    x 4 • 6
  -----------
      3 1 7 4
    1 • 8 •
  2 1 1 6
  -----------
  2 3 • • 4 4
```

Así pues, sólo nos queda por calcular la decene del multiplicador. Veamos: Qué duda cabe que al sumar cuetro la cifra total de las decenas, tenemos que punto por nueve tiene que dar siete (para que se cumpla también que siete más punto dé catorce); y en el único número que se cumple es en el TRES, y además nos lo demuestra que al multiplicar tres por nueve (27) y después tres por dos (6) más dos que nos llevamos, y al darnos ocho se cumple, ya lo tenemos:

```
      5 2 9
    x 4 3 6
  -----------
      3 1 7 4
    1 5 8 7
  2 1 1 6
  -----------
  2 3 0 6 4 4
```

Como $2^3 = 8$ podemos poner la ecuación dada como:

$$2^{1-x^2} = \frac{1}{2^3}$$

Paso 2^3 al numerador cambiando de signo el exponente:

$$2^{1-x^2} = 2^{-3}$$

Al igualarse las bases se igualan los exponentes:

$$1 - x^2 = -3$$

Despejando x^2 tenemos:

$$x^2 = 4$$

Se trata de una ecuación de segundo grado, por tanto tendrá dos soluciones:

$$x = \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Por el 2.° método de toma de log tendríamos:

$$\log 2^{1-x^2} = \log 2^{-3}$$

Aplicando logaritmo de una potencia tendríamos:

$$(1 - x^2) \log 2 = (-3) \log 2$$

Despejamos $(1 - x^2)$

$$1 - x^2 = -3 \frac{\log 2}{\log 2}$$

$$1 - x^2 = -3$$

Despejando x^2:

$$x^2 = 4$$

Sacando la raíz cuadrada para eliminar el cuadrado tendremos

$$x^2 = \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

11.–ECUACIONES LOGARITMICAS

Se denominan ecuaciones logarítmicas aquellas ecuaciones en las cuales la incógnita está afectada por la operación logaritmo.

Ej.: $\log (2x - 8) - \log 3 = \log 7$

$$\log \frac{5x - 3}{2x - 7} = \log 5$$

$$\frac{\log (3 - x^2)}{\log (x - 3)} = 5 \quad , \quad \text{etc.}$$

La forma de resolverlos es muy sencilla. Se realizan en la ecuación las operaciones matemáticas necesarias para transformarlas en una igualdad de logaritmos; una vez conseguido, sólo tendremos que aplicar antilogaritmos para obtener una igualdad de ecuaciones.

Ej.: Sea la ecuación

$$\log_3 (x + 1) + \log_3 3 = \log_3 6$$

Recordando las operaciones con logaritmos, sabemos que la suma de dos logaritmos es el logaritmo de un producto, luego tenemos:

$$\log_3 [(x + 1)\ 3] = \log_3 6$$

Aplicando antilogaritmos, puesto que ya hemos logrado la igualdad de logaritmos, nos queda:

$$(x + 1)\ 3 = 6$$

Eliminando paréntesis:

$$3x + 3 = 6$$

Despejando x tendremos:

$$x = \frac{6 - 3}{3}$$

$$x = 1$$

Ej.: Resolver la ecuación logarítmica:

$$\frac{\log_2 (1 - 2x)}{\log_2 (1 - x)} = 2$$

Quitamos el cociente pasando el denominador multiplicando al otro miembro:

$$\log_2 (1 - 2x) = 2 \log_2 (1 - x)$$

MATEMATICAS INDIAS

Tuvieron nacimiento en la época védica (siglo X antes de J.C.). Matemáticas muy rudimentarias y sólo con cálculos ábacos para realizar los canjes de las materias primas. Fue en la época brahmánica (siglo V antes de J.C.) cuando los hindúes llegaron a la madurez. Tuvieron contactos tanto con el mundo griego como con el chino, debido a las invasiones de estos dos pueblos y la expansión del budismo en China y también su expansión hacia el mundo árabe.

Los matemáticos hindúes se apoyaron más en el cálculo numérico que en la deducción y el estudio. El sistema de numeración empleado fue el decimel, el cual le dio un impulso definitivo a todo el desarrollo posterior. Pero todos los trabajos de la Matemática fueron usados en época posterior para el estudio de la Astronomía.

Aryabhta (siglo V antes de J.C.) y de Brahmagupta (siglo VI antes de J.C.), Bhaskara escribieron tratados matemáticos realizando este último cálculo de raíces cuadradas. El cálculo de las ecuaciones de primero y segundo grado lo realizaron por procedimientos algebraicos. En las ecuaciones de segundo grado sacaron las dos soluciones, dejando de esta manera abierto el camino del Algebre seguido posteriormente por los árabes.

En la provincia de Santander, en lo más bello e intrincado de la Montaña, el río Pas cruza el valle de su nombre y con una derivación de éste se distingue a todos los habitantes de los pueblecitos en él enclavados, a quienes se les denomina pasiegos. El río Pas es una arista sublime que forja maravillosos paisajes entre rocas y campos verdes, por donde discurren sus aguas y pacen los rebeños.

La cueva de la Pasiega es una gruta prehistórica excavada por las aguas, situada en Puente Viesgo, y que posee una interesante muestra de pinturas rupestres pertenecientes al período auriñaciense, con un estilo correspondiente al denominado franco-cantábrico, representan animales, caballos, toros, ciervos y tienen muchas similitudes con las demás cuevas descubiertas en la cornise cantábrica, entre las que destaca por méritos indiscutibles la famosa cueva de Altamira, también situada en Centabria.

Como ya hemos conseguido la igualdad de logaritmos se toman antilogaritmos y queda:

$$1 - 2x = (1 - x)^2$$

Se desarrolla el cuadrado de la diferencia:

$$1 - 2x = 1 + x^2 - 2x$$

Se pasan las "x" a un miembro y los números a otro:

$$x^2 - 2x + 2x = 1 - 1$$

$$x^2 = 0$$

Quitamos el cuadrado:

$$x = \pm \sqrt{0}$$

$$\boxed{x = 0}$$

Ej.: Resolver la ecuación:

$$\log_4 \sqrt[3]{2} = x$$

Aplicando la definición de logaritmos podemos poner que:

$$4^x = \sqrt[3]{2}$$

Sacando el dos fuera de la raíz, tenemos:

$$4^x = 2^{1/3}$$

Como $4 = 2^2$:

$$(2^2)^x = 2^{1/3}$$

Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes:

$$2^{2x} = 2^{1/3}$$

Como vemos, se nos ha transformado en una igualdad de potencias; como las bases son las mismas, los exponentes también tienen que ser iguales:

$$2x = \frac{1}{3}$$

Despejando x:

$$\boxed{x = \frac{1}{6}}$$

NOTA.—En casos como el ejemplo anterior en los cuales la operación logaritmo aparece en la ecuación pero no está asociada directamente a la incógnita, no es necesario tomar logaritmos pudiendo solucionarla simplemente como una ecuación exponencial después de haber efectuado los cambios oportunos.

12.–SISTEMAS LOGARITMICOS

Cuando hay más de una incógnita afectada con la operación logaritmo, para encontrar el valor de éstas será necesaria la presencia de dos ecuaciones, originándose un sistema logarítmico.

Para resolver estos sistemas, se pueden utilizar de forma general tres métodos.

1.er Método.–Transformando las ecuaciones logarítmicas en ecuaciones exponenciales.

2.º Método.–Por cambio de variables.

3.er Método.–Tomando antilogaritmos.

No obstante, hay sistemas que no se pueden realizar por los tres métodos; se tomará, por tanto, en cada momento aquel método que mejor se ajuste a las características del problema.

Vamos a resolver algunos ejemplos:

Ejemplo: Encontrar el valor de las variables "x" e "y" en el siguiente sistema:

$$\log_3 \frac{x}{y} = 2$$

$$2\log_3 x + 3\log_3 y = 9$$

1.er Método

Vamos a transformar estas ecuaciones logarítmicas en ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 3^2 = \dfrac{x}{y} \\ \log_3 x^2 + \log_3 y^3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^2 = \dfrac{x}{y} \\ \log_3 (x^2 \cdot y^3) = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^2 = \dfrac{x}{y} \\ 3^9 = x^2 \cdot y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3^2 \cdot y \quad (1) \\ \text{Sustituimos este valor en la 2.ª ecuación.} \end{cases}$$

$$3^9 = (3^2 \cdot y)^2 \cdot y^3; \quad 3^9 = 3^4 y^2 \cdot y^3; \quad 3^9 = 3^4 \cdot y^5$$

$$y^5 = \frac{3^9}{3^4}; \quad y^5 = 3^{9-4}; \quad y^5 = 3^5; \quad y = \sqrt[5]{3^5}$$

$$y = 3$$

Sustituimos este valor en (1):

$$x = 3^2 \cdot 3 \rightarrow x = 3^3; \quad x = 27$$

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS".

La obra está estructurada y pensada pare **generar una interconexión familiar entre padres, hijos y hermanos entre sí** e, incluso, para extender esta intercomunicación al profesorado del colegio donde estudia el alumno. Nosotros la ofrecemos como punto de referencia o lugar común de consulta para el alumno, los padres y el colegio.

OBSERVAR EL SOL (2)

Al observar el Sol sin usar ningún aparato óptico, sólo mirando a través del cristal de un soldador, veremos en el astro rey unas manchas. Detalle curioso es que además de tener cada una forma distinta, vemos que van desapareciendo al cabo de unos días y apareciendo otras nuevas.

Enormes granulosidades y un espectáculo impresionante, descomunales montañas de fuego, las cuales se verán mucho mejor durante los eclipses, que, aunque éstos duren muy poco, es la visión más extremecedora que podremos contemplar, con sus brillantes llamaradas, lanzadas hacia el espacio y frecuentemente a miles de kilómetros de distancia. Téngase en cuenta que el eclipse total del Sol tiene una duración de menos de siete minutos y medio.

En el año existen entre dos y cinco eclipses totales de Sol, los cuales son percibidos en pocos lugares. Si tenéis la oportunidad de ver alguno de ellos a lo largo de vuestra vida, observaréis la imagen más importante que jamás halláis visto.

2.º Método

$$\left.\begin{array}{l} \log_3 \dfrac{x}{y} = 2 \\ 2\log_3 x + 3\log_3 y = 9 \end{array}\right\}$$ Aplicando en la 1.ª ecuación la propiedad del logaritmo de un cociente, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_3 x - \log_3 y = 2 \\ 2\log_3 x + 3\log_3 y = 9 \end{array}\right\}$$ Realizamos un cambio de variable:

$$\log_3 x = A, \quad \log_3 y = B$$

$$\left.\begin{array}{l} A - B = 2 \\ 2A + 3B = 9 \end{array}\right\}$$ $A = 2 + B$; sustituimos este valor en la 2.ª ecuación

$$2(2 + B) + 3B = 9; \quad 4 + 2B + 3B = 9; \quad 5B = 9 - 4$$

$$5B = 5 \Rightarrow B = \frac{5}{5} = 1$$

"B = 1"

Por tanto,

$$A = 2 + B \Rightarrow A = 2 + 1; \quad \text{"A = 3"}$$

Pero a nosotros no nos interesa el valor de A, ni el de B; nos piden el valor de las variables "x" e "y". Así, pues, nos fijamos en las igualdades:

$$\log_3 x = A \qquad \text{y} \qquad \log_3 y = B$$

Por tanto,

$$\log_3 x = 3 \Rightarrow 3^3 = x, \quad \boxed{x = 27}$$

$$\log_3 y = 1 \Rightarrow 3^1 = y; \quad \boxed{y = 3}$$

Dándonos el mismo resultado que por el método anterior.

1.º Método

En este caso no se pueden tomar antilogaritmos directamente, ya que los segundos miembros de las 2 ecuaciones son números sin expresión logarítmica.

Así, pues, lo primero que se tiene que hacer es encontrar qué número tiene como logaritmo en base 3 al número 2, y por otro lado qué número tiene como logaritmo en base 3 al número 9. Aunque a primera vista parece algo muy complicado, en realidad es un proceso muy sencillo. Veamos:

● $\log_3 N = 2 \Rightarrow 3^2 = N; \quad N = 9$

Por tanto, en la 1.ª ecuación, en lugar del 2 podemos poner su equivalente, es decir, "$\log_3 9$".

● $\log_3 M = 9 \Rightarrow 3^9 = M$

Por tanto, en la 2.ª ecuación, en lugar del número 9 podemos poner su equivalente, es decir, "$\log_3 3^9$".

Con estos cambios, el sistema queda de esta forma:

$$\left.\begin{array}{l} \log_3 \dfrac{x}{y} = \log_3 9 \\ 2\log_3 x + 3\log_3 y = \log_3 3^9 \end{array}\right\}$$

En la 2.ª ecuación tenemos una suma de logaritmos que vamos a transformar.

● $\left.\begin{array}{l} \log_3 \dfrac{x}{y} = \log_3 9 \\ \log_3 x^2 + \log_3 y^3 = \log_3 3^9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \log_3 \dfrac{x}{y} = \log_3 9 \\ \log_3 (x^2 \cdot y^3) = \log_3 3^9 \end{array}\right\}$

En las dos ecuaciones tomamos antilogaritmos, quedando:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 9 \\ x^2 \cdot y^3 = 3^9 \end{array}\right\}$$

$x = 9y; \quad x = 3^2 y$

Sustituimos este valor en la 2.ª ecuación, quedando:

$$(3^2 \cdot y)^2 \cdot y^3 = 3^9; \quad 3^4 y^2 \cdot y^3 = 3^9; \quad 3^4 y^5 = 3^9$$

$$y^5 = \frac{3^9}{3^4}; \quad y^5 = 3^{9-4}; \quad y^5 = 3^5; \quad y = \sqrt{3^5}$$

$$y = 3$$

Introducimos este valor de "y", en la expresión $x = 3^2 y$, quedando:

$$x = 3^2 \cdot 3; \quad x = 3^3; \quad x = 27$$

Ej.: Encontrar el valor de las variables "x" e "y" en el siguiente sistema:

$$\log_x (y - 17) = 3$$

$$\log_{25} (7 - x) = 1/2$$

La mejor forma para resolver este sistema es transformando las ecuaciones logarítmicas en ecuaciones exponenciales:

A lo largo de un año tiene que haber como mínimo dos eclipses, y los dos han de ser de Sol, y siete eclipses como máximo. Cuatro o cinco de Sol y dos o tres de Luna, y tienen lugar cada cierto período de tiempo.

No se pueden ver los eclipses totales de Sol en un mismo sitio, sino separados por períodos de tiempo muy largos.

En la antigüedad creían que el eclipse era una lucha del Sol o de la Luna contra un dios. Los indios y los mongoles creían que un demonio había pecado y Visuus lo castigó cortándole la cabeza, y este demonio perseguía al Sol y a la Luna para comérselos por haberle delatado. En Mesopotamia y Asiria, un eclipse de Luna daba a entender la pronta muerte del rey correspondiente, así como toda clase de misterios. Un eclipse de Luna salvó a Cristóbal Colón de morir de hambre, pues amenazó a los indios con quitarles la Luna si no le daban lo que necesitaba. Los indios, al ver que la Luna se apagaba, se aterraron y dieron a Colón lo que les pidió.

A fineles del siglo XIX se da en Rusia de la mano de Dokuchaiev un importantísimo avance en el estudio de la edafología, al considerar la construcción del suelo como un combinado entre clima, organismos vivos, topografía y roca madre, que origina con sus transformaciones las distintas clases de suelos.

Hay otro cientlfico, Kubiena, que le da mayor importancia a los seres vivos por transformarse constantemente.

El español José Marina Albareda es el más importante edefólogo con que contamos.

Algunas bacterias fijan el nitrógeno del aire y lo trensforman en nitrato, así como cambian organismos inaprovechables en materies inorgánicas de fácil asimilación. La lluvia lava la superficie del suelo haciendo que en las zonas menos porosas se acumulen sales y organismos. La influencia climatológica en la formación de suelo es de gran importancia. En los climas polares se forman los suelos de "tundra". Según avanzamos a climas más cálidos eparecen las tierras pardas, como en España. Los suelos más fértiles corresponden a las "pampas", pues el frío del invierno destruye la vegetación primaveral acumulando materia orgánica. Según avanzamos hacia el calor aperecen los suelos áridos hasta llegar a las zonas de los desiertos que dan lugar a los suelos "salinos".

La Edafología está unida estrechamente con las ciencias forestales y agrícolas, pues ya sabemos la gravedad de la destrucción de la flora de un país, ya que su regeneración es muy lenta y coatosa.

Aplicando el concepto de logaritmo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = y - 17 \\ 25^{1/2} = 7 - x \end{array}\right\} \text{ La 2.ª ecuación se transforma en: } \sqrt{25} = 7 - x;\quad 5 = 7 - x,\quad x = 2$$

Este valor se introduce en la 1.ª ecuación, quedando:

$$(2)^3 = y - 17;\quad 8 = y - 17;\quad 8 + 17 = y;\quad y = 25$$

13.– PROBLEMAS SOLUCIONES

Problema 1

Representar gráficamente la función logarítmica:

$$y = \log_5 x$$

Solución

$$\text{Para } x = \frac{1}{25} \rightarrow \log_5 \frac{1}{25} = y \rightarrow 5^y = \frac{1}{25}$$

$$5^y = \frac{1}{5^2} \rightarrow 5^y = 5^{-2} \rightarrow \quad y = -2$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{5} \rightarrow \log_5 \frac{1}{5} = y \rightarrow 5^y = \frac{1}{5}$$

$$5^y = 5^{-1} \rightarrow \quad y = -1$$

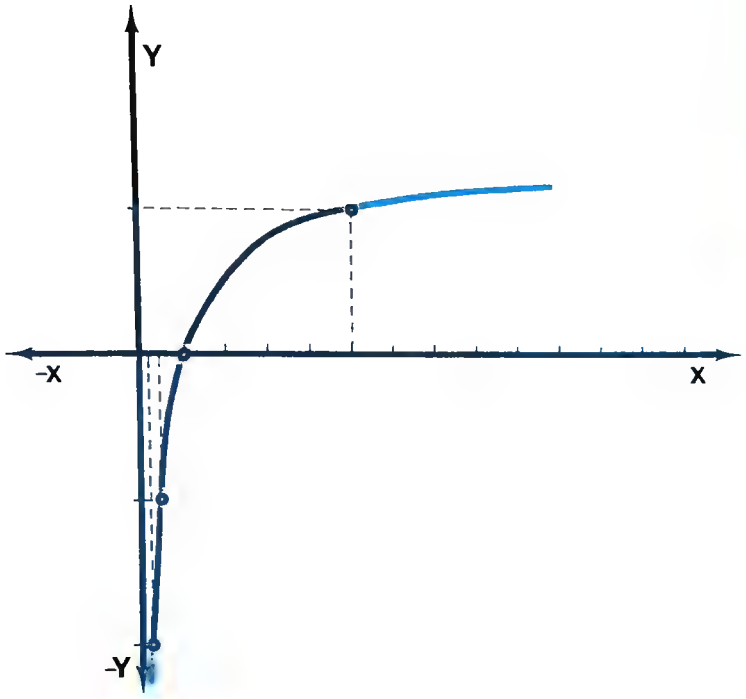
$$\text{Para } x = 1 \rightarrow \log_5 1 = y \rightarrow 5^y = 1 \rightarrow \quad y = 0$$

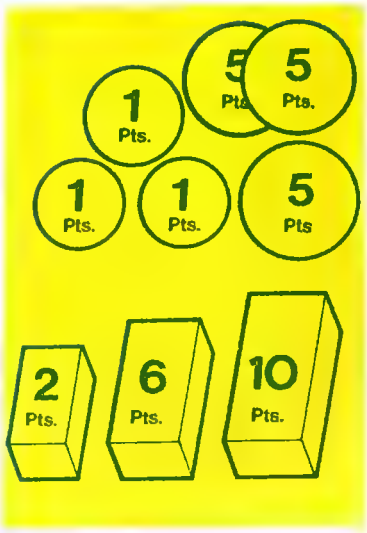
$$\text{Para } x = 5 \rightarrow \log_5 5 = y \rightarrow 5^y = 5 \rightarrow \quad y = 1$$

$$\text{Para } x = 25 \rightarrow \log_5 25 = y \rightarrow 5^y\ 25 \rightarrow 5^y = 5^2 \rightarrow \quad y = 2$$

Plasmamos todos estos pares de valores obtenidos en una tabla:

x	1/25	1/5	1	5	25
y	−2	−1	0	1	2





Vamos a realizar un pequeño juego. A veces, de los juegos recibimos pequeñas enseñanzas. Este es uno que por deducción sacaremos una muy buena enseñanza.

Necesitamos tres monedas de 1 peseta y otras tres de 5 pesetas. Además, también necesitamos tres cajitas (pueden ser distintas) en las que en cada una de ellas ponga escrito 2 pesetas, 6 pesetas y 10 pesetas.

En cada una de las cajitas ponemos dos monedas y así en una de ellas habrá 2 pesetas (dos monedas de peseta), en otra habrá 10 pesetas (dos monedas de 5 pesetas) y en la tercera 6 pesetas (una mnoneda de 1 peseta y otra de 5). En la caja, todas las anotaciones son **falsas,** es decir, donde pone el rótulo de 2 pesetas **no** pueden existir nunca dos monedas de 1 peseta; donde pone 6 pesetas **no** puede haber nunca una moneda de 1 peseta y otra de 5, y, por último, donde pone 10 pesetas, **no** puede contener dos monedas de 5 pesetas, o sea, repetimos, los rótulos son para equivocar.

Bien, el problema consiste en tomar una moneda del interior de una de las cajitas y saber lo que hay en las otras cajas. ¿Cómo hacerlo?

Solución en Página 784.

MEMORIAS LEGENDARIAS

Memoria de colores y trazos.—Se han dado muchos casos, pero vamos a recordar algunos solamente.

—El pintor Sartrain realizó una copia de memoria, exactamente igual, de un Murillo destruido en un incendio.

—El "Erasmo" de Holbein, de la colección de Lecoq de Boisbandrán, es una copia realizada de memoria por el pintor Alphonse Legros.

—Hazaña semejante a las anteriores es le de G. Bellenguer, que un jurado realizó sin error alguno el de "Laura de Danti", de Ticiano.

Memoria de palebras, nombres, etc.—Se dice que Séneca podía repetir dos mil palabras no relacionadas, después de haberlas oído una vez.

—Pico de la Mirándola, ya desde muy pequeño, era capaz de retener todo lo que oía en voz alta. A los 13 años podía repetir las palabras de dos páginas después de leerlas un par de veces.

—Théodule Ribot, en su obra sobre las enfermedades de la memoria, habla de **un tonto del pueblo** con una prodigiosa memoria. El tal tonto recordaba el día de cada enterramiento celebrado en su parroquia desde hacía 35 años. También recordaba nombre y edad de los difuntos y hasta el de las personas que presidían los duelos.

Problema 2

Representar gráficamente la función exponencial de base 0,1.

Solución

Para $x = 2 \rightarrow f(2) = 0{,}1^2 = 0{,}01$

Para $x = 1 \rightarrow f(1) = 0{,}1^1 = 0{,}1$

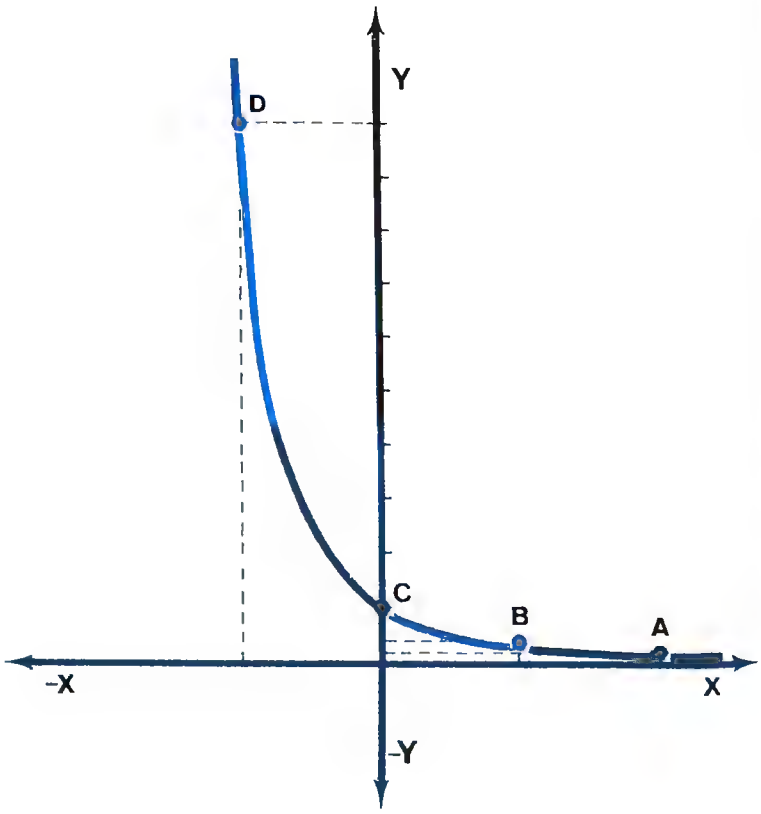
Para $x = 0 \rightarrow f(0) = 0{,}1^0 = 1$

Para $x = -1 \rightarrow f(-1) = 0{,}1^{-1} = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$

Trasladamos los pares de valores a una tabla:

	A	B	C	D
x	2	1	0	−1
y	0,01	0,1	1	10

Pasamos los puntos a unos ejes de coordenadas.



Problema 3

Resolver la ecuación exponencial:

$$2^{3x} = 8^{-x+3}$$

Solución

Como $8 = 2^3$ podemos poner la ecuación como

$$2^{3x} = (2^3)^{-x+3}$$

Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes:

$$2^{3x} = 2^{-3x+9}$$

Primer método.—Una vez igualadas las bases se igualan los exponentes.

$$3x = -3x + 9$$

Se agrupan las incógnitas:

$$6x = 9$$

Despejamos x:

$$x = \frac{9}{6} \qquad x = 1{,}5$$

Segundo método.—Se toman logaritmos:

$$\log 2^{3x} = \log 2^{-3x+9}$$

Se aplica el logaritmo de una potencia:

$$3x \log 2 = (-3x + 9) \log 2$$

Se agrupan los logaritmos en un miembro:

$$3x = (-3x + 9)\frac{\log 2}{\log 2}$$

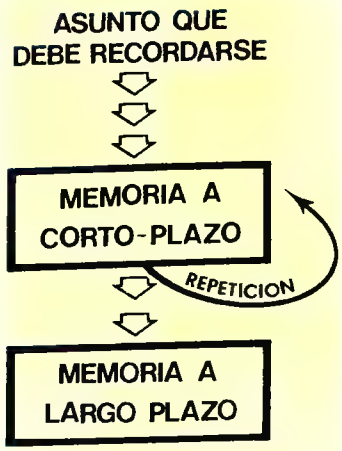
Como $\log 2/\log 2 = 1$, queda: $3x = -3x + 9$

Se agrupan las x:

$$6x = 9$$

Se despeja la incógnita:

$$x = \frac{9}{6} \qquad x = 1{,}5$$



Memoria auditiva

Se cuenta que **Mozart** transcribió el "Miserere de la Capilla Sixtina" después de oírlo dos veces. También hacía lo mismo con sus propias obras.

Mendelssohon, a los doce años, tocaba sin partituras obras bien difíciles, como las "Fugas" de Bach o las "Sonatas" de Beethoven.

Memoria de textos

—Joseph Scaliger aprendió en veintiún días la "Ilíada" y la "Odisea".

—El filósofo alemán Fichte, discípulo de Kant, con sólo ocho años de edad era capaz de escribir el sermón que había oído en la parroquia.

—Pierre Benoit sabía de memoria más de diez mil versos.

—De Ben Gourion se dice que sabía la Biblia de memoria y podía citar páginas enteras de Karl Marx, etc.

Si necesitamos retener la información más de unos segundos, perdemos algo de esa información si no la repetimos conscientemente una y otra vez.

Llamamos **repetición** al acto por el cual traemos a nuestra mente de forma reiterativa el material que deseamos retener.

Con la repetición conseguimos dos cosas:

Logramos retener el material en la memoria a corto-plazo durante mucho tiempo.

Se facilita el paso del material de la memoria a corto-plazo a la memoria a largo-plazo.

Debemos tener muy presente que sólo lograremos introducir el material en la memoria a corto-plazo **por la repetición** si la cantidad que deseamos retener es pequeña.

En el gráfico de la página 4 queda representada la actuación de la repetición. Como resultado se obtiene la memoria a largo-plazo.

OLVIDO

La memoria a corto-plazo puede perder su material de dos formas:

Olvido por interferencia de otro material.—La memoria a corto-plazo es limitada en cuanto a la cantidad de material distinto que puede tener y a la **fuerza de huella** de cada material.

Pero ¿cómo se van debilitando las huellas de memoria? La fuerza de la memoria depende de la cantidad de bloques de material distinto que estén presentes en la misma.

Así, por ejemplo, cuando presentamos a la memoria un material con una fuerza de huella "A", según vamos presentando distintos materiales, la fuerza de huella de todos ellos disminuye de su valor primitivo.

Al presentar por primera vez el ítem (material), la fuerza de huella es "A".

Si presentamos un nuevo ítem, su fuerza de huella descendería a "Af" (f = factor de olvido).

Si presentamos un tercer ítem, la fuerza de huella descenderá a (Af) f = Af².

Problema 4

Resolver por los dos métodos la ecuación exponencial:

$$6^2 + 6^{3-x} = 42$$

Solución

Despejamos el factor que contiene la incógnita:

$$6^{3-x} = 42 - 6^2$$

$$6^{3-x} = 42 - 36$$

$$6^{3-x} = 6.$$

Primer método.—Como las bases son iguales, se igualan los exponentes:

$$3 - x = 1$$

Se despeja x y tenemos:

$$x = 2$$

Segundo método.—Se toman logaritmos en los dos miembros:

$$\log 6^{3-x} = \log 6$$

Aplicando el logaritmo de una potencia:

$$(3 - x) \log 6 = \log 6$$

Despejando (3 − x):

$$3 - x = \frac{\log 6}{\log 6}$$

Como log 6/log 6 = 1, queda: 3 − x = 1

Despejamos x:

$$x = 2$$

Problema 5

Resolver la ecuación logarítmica:

$$3 \log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$$

Solución

Aplicando logaritmo de una potencia:

$$\log x^3 - \log 32 = \log \frac{x}{2}$$

Aplicando logaritmo de un cociente:

$$\log \frac{x^3}{32} = \log \frac{x}{2}$$

Se toman antilogaritmos:

$$\frac{x^3}{32} = \frac{x}{2}$$

Se quitan los cocientes:

$$2x^3 = 32x$$

Se simplifica dividiendo entre dos:

$$x^3 = 16x$$

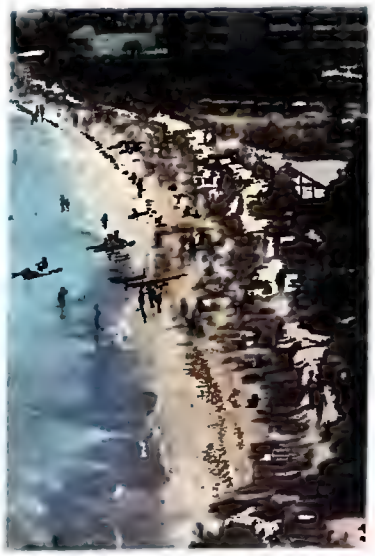
Pasamos todo al primer miembro:

$$x^3 - 16x = 0$$

Como se trata de una ecuación de tercer grado, tendrá tres soluciones.

Sacamos x factor común:

$$x\,(x^2 - 16) = 0$$



OLVIDO POR DETERIORO A CAUSA DEL PASO DEL TIEMPO

La capacidad de la memoria a corto-plazo puede limitarse por deterioro temporal. Esto significa que cuanto más permanece un ítem en la memoria, más se debilita, hasta que termina por desaparecer.

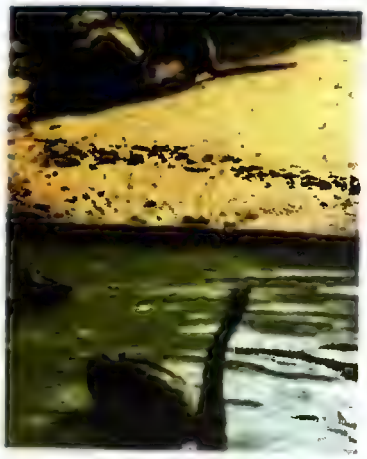
Cada instante de tiempo reduce la fuerza de huella de los ítems adquiridos. Es decir, que cada instante de tiempo en el deterioro temporal actúa de forma semejante a la presentación de un nuevo material en el olvido por interferencia.

Conclusión.—Después de exponer las dos teorías explicativas del olvido: **Por interferencia de otro material** y **por deterioro temporal,** nos preguntamos: ¿Cuál de las dos explica mejor el olvido? ¿Con cuál nos quedamos? Parece razonable concluir que el olvido en la memoria a corto-plazo se produce tanto por la interferencia de otros materiales como por el deterioro temporal.

AMNESIAS

De lo que llevamos dicho se deduce claramente que la memoria a corto-plazo es imprescindible para mantener la información durante un período de tiempo mínimo, necesario para que se consolide en el almacenamiento de la memoria a largo-plazo. Pero si aplicamos una

Continúa en la página siguiente.



fuerte cantidad de corriente eléctrica al cerebro del animal, afectaremos gravemente esa memoria, interrumpiendo el aprendizaje.

Experimento del choque electroconvulsivo (E.C.S.)

Colocamos una rata sobre un pedestal alto y lo bastante incómodo como para que por necesidad natural, el animal tienda a buscar la comodidad apoyando sus patas fuera del pedestal. Pero, debajo del pedestal, hay un suelo electrificado y cada vez que el animal intente apoyar sus patas, buscando comodidad, recibirá una desagradable descarga eléctrica.

Sabemos que en **condiciones normales,** cualquier rata aprende a quedarse en el pedestal, por incómoda que resulte la postura, antes que recibir en sus patas la molesta descarga eléctrica. Pero si **inmediatamente** después de apoyar las patas sobre el suelo electrificado le aplicamos un choque electroconvulsivo (E.C.S.) al cerebro, el animal **continuará sin aprender** recibiendo descarga tras descarga.

Este experimento demuestra que el animal **olvida** tanto la sensación desagradable de la descarga eléctrica en sus patas como el E.C.S. en su cerebro.

Se ha demostrado que el choque electroconvulsivo puede interrumpir el aprendizaje de los animales y causar amnesia en los hombres, por lo menos en sucesos recientes.

Si el primer miembro se tiene que igualar a cero pueden ocurrir dos cosas:

$x = 0$ 1.ª solución

ó

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

Quitamos el cuadrado sacando raíz en los dos miembros:

$$x = \pm \sqrt{16}$$

$x = 4$ 2.ª solución

$x = -4$ 3.ª solución

Problema 6

Resolver la ecuación logarítmica:

$$\log_2 (y - 18) = 2$$

Solución

Es suficiente con aplicar la definición de logaritmo para tener:

$$2^2 = y - 18$$

Despejando la incógnita:

$$y = 2^2 + 18$$

$$y = 22$$

Problema 7

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 6y &= 36 \\ 2\log_2 x - \log_2 y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Aplicamos en la segunda ecuación el logaritmo de una potencia y nos queda:

$$\log_2 x^2 - \log_2 y = 1$$

Aplicamos el logaritmo de un cociente:

$$\log_2 \frac{x^2}{y} = 1$$

Aplicando el concepto de logaritmo:

$$2^1 = \frac{x^2}{y}$$

Despejando y tendremos:

$$y = \frac{x^2}{2}$$

Trasladamos este valor de y que hemos obtenido en la segunda ecuación a la primera que nos quedaría:

$$3x + 6\frac{x^2}{2} = 12$$

La simplificamos dividiendo entre tres:

$$x^2 + x = 12$$

AMNESIA RETROGRADA

El que padece amnesia retrógrada olvida lo ocurrido con anterioridad al accidente. La amnesia retrógrada se suele producir por una caída, fuerte conmoción cerebral, fuerte golpe en la cabeza o por choque eléctrico. Cuando tiene lugar el accidente, se borran de la memoria los acontecimientos hacia atrás, pero proporcionalmente a la gravedad de la lesion. Los recuerdos no se borran realmente, sino que quedan como encubiertos.

Conforme se va recuperando el paciente, se van recordando los acontecimientos, pero empezando por los más antiguos en el tiempo. Así, poco a poco, hasta lograr los acontecimientos más próximos, aunque los acontecimientos **inmediatamente anteriores** al accidente casi nunca se recuerdan.

Quizá se deba a que lo ocurrido en el espacio de tiempo inmediatamente anterior al accidente sólo estaba en la memoria a corto-plazo y no había pasado a consolidarse en la memoria a largo-plazo.

Conclusiones prácticas sobre la amnesia retrógrada

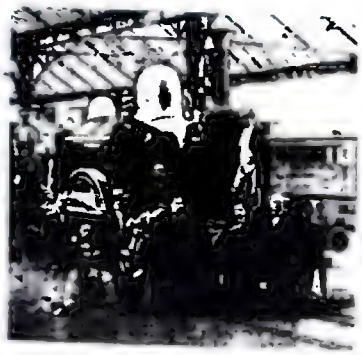
Sólo queda afectada la memoria de acontecimientos ocurridos en el pasado.

Otros tipos de información almacenada, tales como el uso del lenguaje o la comprensión, no quedan afectados.

Sabemos que depués del accidente traumático, la memoria se va recuperando gradualmente. Esto demuestra que la información no quedó destruida por el choque, sino simplemente oculta e inaccesible.

El punto anterior demuestra que el **almacén de información** y los **procesos de recuperación** de recuerdos almacenados son **cosas distintas.**

Los recuerdos más antiguos son los que primero se recuperan y, por tanto, tienen menos probabilidades de perderse.



El primer ferrocarril que funcionó en España fue el que cubría la línea Barcelona Mataró, que hizo su viaje inaugural el 26 de octubre de 1848. Tres años más tarde se establece una nueva línea entre Madrid y Aranjuez. España fue el décimo país en incorporarse a este medio de transporte para viajeros. Posteriormente, y de una forma rápida en casi todos los países del mundo, se adopta por sus grandes ventajas: rapidez y economía de su explotación. Se puede decir que su expansión se realizó hasta la primera guerra mundial del 1914. A partir de estos años, apareció un peligroso rival, el automóvil, que poco a poco fue introduciéndose como vehículo apropiado para transporte de todo tipo. Actualmente, el ferrocarril y la carretera conviven satisfactoriamente, mejorando constantemente. La tracción clásica de vapor se sustituye por locomotoras eléctricas Diesel y se construyen trenes cada vez más rápidos y más lujosos.

Stephenson inventa y construye en 1814 su locomotora movida por vapor, con una fuerza de tracción aprovechable, y al año siguiente ya se aplica su invento en las minas de carbón.

Este hombre tenaz y estudioso aplicó los descubrimientos anteriores de Watt en su célebre máquina de vapor de émbolo.

Nos ha quedado una ecuación de segundo grado, luego tendremos dos soluciones de "x", y, por tanto, dos soluciones de "y".

Agrupando todos los términos en el primer miembro nos quedaría:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Aplicando la fórmula de las ecuaciones de 2.º grado:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} \quad ; \quad x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{-1 - 7}{2} = \frac{-8}{2} \quad ; \quad x_2 = -4$$

Para $x_1 = 3$

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2} \quad ; \quad y_1 = \frac{9}{2}$$

$$y_1 = 4{,}5$$

Para $x_2 = -4$

$$y_2 = \frac{x_2^2}{2} \quad ; \quad y_2 = \frac{(-4)^2}{2}$$

$$y_2 = 8$$

TEMA 27

LOGARITMOS DECIMALES Y NEPERIANOS

TABLAS DE LOGARITMOS.

1.–CONCEPTO DE LOGARITMOS DECIMALES.
   1.a. Cálculo de la característica.
   1.b. Cálculo de la mantisa. Teorema de la mantisa.
2.–CALCULO LOGARITMICO.
   2.a. Problema directo.
   2.b. Problema inverso. Antilogaritmo.
3.–COLOGARITMO.
4.–CONCEPTO DEL NUMERO "e".
5.–LOGARITMOS NEPERIANOS.
6.–PROBLEMAS. SOLUCIONES.

TEMA 27

Solución al problema de los autobuses de la página 743.

La velocidad del estudiante y la de los autobuses que circulan en dirección contraria es proporcional al de los autobuses que adelanta, y viceversa;

$$\left.\begin{array}{l} K \times 8 = V + 8 \\ K \times 6 = V - 6 \end{array}\right\} \text{ si dividimos tendremos}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{V+8}{V-6};\quad 8V - 48 = 6V + 48$$

$$8V - 6V = 48 + 48$$

$$2V = 96$$

$$V = \frac{96}{2} = 48$$

Velocidad, 48 Km/h

TABLAS

Logaritmos comunes (Base 10)

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010

1.— CONCEPTO DE LOGARITMO DECIMAL

Cuando un logaritmo tiene como base el número 10 se denomina **logaritmo decimal.** Como ya se mencionó en el tema anterior, la forma usual de representar estos logaritmos decimales es "log" sin indicar base alguna.

Este tipo de logaritmos cumplen todas las propiedades que señalamos para los logaritmos en una base general "a"

Todas las potencias de 10 tienen como logaritmo decimal su exponente. Esto se comprueba fácilmente aplicando la definición de logaritmo vista en el tema anterior.

Ej.: a) $\log 0{,}001 = \log 10^{-3}$

$\log 10^{-3} = y$

$10^y = 10^{-3} \Rightarrow$ (y = —3)

b) $\log 0{,}01 = \log 10^{-2}$

$\log 10^{-2} = y$

$10^y = 10^{-2} \Rightarrow$ (y = —2)

c) $\log 0{,}1 = \log 10^{-1}$

$\log 10^{-1} = y$

$10^y = 10^{-1} \Rightarrow$ (y = —1)

d) $\log 1 = \log 10^0 = y$

$10^y = 10^0 =$ (y = 0)

e) $\log 10 = \log 10^1$

$\log 10^1 = y$

$10^y = 10^1 \Rightarrow$ (y = 1)

f) $\log 100 = \log 10^2$

$\log 10^2 = y$

$10^y = 10^2 \Rightarrow$ (y = 2)

MATEMATICAS ARABES

Herederos directos de la matemática india y griega, no apareció esta matemática hasta el siglo VIII de nuestra era. En el siglo IX en Bagdad se creó la "Mansión de la Sabiduría" o "Academia de Ciencias árabes", que fue el primero y más célebre de los centros matemáticos árabes.

Tradujeron la matemática indú, pero lo que les sirvió de más base, fue la traducción de las matemáticas griegas, dedicándose los sabios de dicha "Mansión" exclusivamente al estudio de esta ciencia, especialmente al cálculo matemático.

Respecto a Astronomía, igualmente tradujeron obras de los países anteriormente citados, pero, o no hicieron gran afición a ésta, o han desaparecido casi en total a excepción de Al-juarizmi, que realizó la medición de un grado del arco terrestre.

A este mismo se le considera el fundador del Algebra. Abùl-Maja, seguidor de Euclides y Diofanto, considerado como uno de los promotores de la Trigonometría.

El pueblo árabe, inquieto y transhumante, llevó su ciencia a todo lo largo del Mediterráneo estableciendo escuelas en Córdoba, Sevilla y Granada, por lo tanto el pueblo español y a su vez, la América de habla hispana, somos descendientes directos de esta ciencia de los árabes.

LOGARITMOS

¿Quién que estudie o estudió matemáticas no consultó multitud de veces las tablas de logaritmos decimales para buscar las mantisas?

Las mantisas, según las diversas tablas de logaritmos tienen varios números (las más corrientes son las de SEIS CIFRAS). Existen tablas de más de seis cifras (raras veces usadas, para cálculos astronómicos, de navegación o en alta investigación). Para los estudiantes de E.G.B. o B.U.P., creemos que no son necesarias tantas cifras, aunque si bien, se deben de acostumbrar a usarlas. Conque solamente tengan dos cifras las mantisas es más que suficiente.

¿Quién no recuerda que el logaritmo de dos es 0,301030? Usando solamente dos cifras decimales, vamos a ver si por medio de una pequeña pero lícita trampa, los calculamos. Veamos:

Nos aprendemos el logaritmo de DOS (0,30) el de TRES (0,48) y el de CINCO (0,70) y ya creo que tenemos TODOS.

Log 2 = 0,30
Log 3 = 0,48
Log 4 = Log 2 + Log 2 = 0,30 + 0,30 = 0,60
Log 5 = 0,70
Log 6 = Log 2 + Log 3 = 0,30 + + 0,48 = 0,78
Log 8 = Log 2 + Log 2 + Log 2 = = 0,30 + 0,30 + 0,30 + = 0,90
Log 10 = Log (2 × 5) = Log 2 + + Log 5 = 0,30 + 0,70 = 1,00
Log 12 = Log (3 × 4) = Log 3 + + Log 4 = 0,48 + 0,60 = 1,08

Y así sucesivamente.

Continúa en la página siguiente.

g) $\log 1000 = \log 10^3$

$\log 10^3 = y$

$10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$

. . . . . .

h) $\log 10^{3/4} = y$

$10^y = 10^{3/4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Como vemos, cualquier potencia de 10 tiene como logaritmo un número conocido y exacto.

Cualquier otro número que no sea potencia de 10 tendrá como logaritmo un número decimal que no será exacto.

Ej.: $\log 5 = 0{,}6990 \ldots$

Llamaremos **característica** del logaritmo a la parte entera de dicho logaritmo (situada delante de la coma) y llamaremos **mantisa** del logaritmo a la parte decimal de dicho logaritmo (situada detrás de la coma). Las mantisas pueden estar formadas por 4, 6 ó más cifras, pero nosotros trabajaremos únicamente con mantisas de 4 cifras.

1.a. Cálculo de la característica

Todo número está comprendido entre dos potencias; la característica será el exponente de la menor de las dos potencias.

Ej.: Sea el número 73.

73 es menor que 100 pero mayor que 10.

$$10^1 < 73 < 10^2$$

La característica de 10 es 1 y su mantisa 0,

La característica de 100 es 2 y su mantisa 0,

El logaritmo de 73 no podrá llegar a 2 pero tendrá que ser mayor que 1.

$$1 < \log 73 < 2$$

$\log 73 = 1, \ldots\ldots$

Ej.: Sea ahora el número 0,0007.

En este caso el número es mayor que 0,0001 y menor que 0,001:

$$0{,}0001 < 0{,}0007 < 0{,}001$$
$$10^{-4} < 0{,}0007 < 10^{-3}$$

Nuestro número tendrá por tanto un logaritmo comprendido entre — 4 y — 3:

$$-4 < \log 0{,}0007 < -3$$
$$\log 0{,}0007 = -4 + \ldots.$$

La mantisa de un logaritmo es siempre positiva; por ello cuando la característica es negativa se señala colocando encima de ella un signo negativo.

$$\log 0{,}0007 = \overline{4}, \ldots..$$

Generalizando lo dicho anteriormente, podemos decir que si tenemos un logaritmo mayor que la unidad su característica será el número de cifras enteras (delante de la coma) menos 1.

Ej.: ¿Cuál será la característica de 789.243

Como hay tres cifras enteras:

$$\text{característica} = 3 - 1 = 2$$

Cuando nos encontremos con que el logaritmo es un número decimal pero menor que la unidad, su característica será forzosamente negativa y coincidirá con el puesto que ocupe la primera cifra significativa (distinta de cero) detrás de la coma.

Ej.: ¿Cuál será la característica de 0,000029?

La primera cifra significativa después de la coma es el 2 que ocupa el quinto lugar; luego:

$$\text{característica de } 0{,}000029 = \overline{5}$$

Ej.: ¿Cuál será la característica de 0,007?

En tercer lugar, detrás de la coma se encuentra el 7 que es la primera cifra significativa; luego:

$$\text{característica de } 0{,}007 = \overline{3}$$

Pero claro, nos faltan los logaritmos de los números PRIMOS. ¿Cómo sacarlos? ¿Cómo calcularlos? Muy fácilmente, tan fácil como los anteriores ¡INTERPOLANDO! Si el Log de 8 es 0,90 y el de 6 es 0,78 el Log de 7 bien pudiera ser:

$\frac{0{,}90 + 0{,}78}{2} = \frac{1{,}68}{2} = 0{,}84$ que es el Log de 7.

¿Qué nos falta el Log de 11? Al ser el Log 10 = 1,00 y el de 12 = 1,08; el de 11 sería:

$\frac{1{,}00 + 1{,}08}{2} = \frac{2{,}08}{2} = 1{,}04$ que es el Log de 11.

Así el de trece sería: Log de 12 = 1,08 y el Log de 14 = 1,14;

$\frac{1{,}08 + 1{,}14}{2} = \frac{2{,}22}{2} = 1{,}11$ que es el Log de 13.

y así sucesivamente, y siempre con métodos concretos y por **deducción** podemos construirnos nuestra **particular** tabla de logaritmos, que podemos incluso comprobar: así por ejemplo el Log de 5 sería Log de $\frac{10}{2}$ o sea Log de 10 menos Log de 2, (ya que sabemos que para multiplicar se suman los logaritmos y para dividir se restan) como el Log de 10 es 1,00 y el de dos es 0,30 entonces el Log de 5 será 1,00 — 0,30 = 0,70 que es el Log de 5.

Comprobaremos también, por ejemplo, el logaritmo de SEIS que es igual a Log de $\frac{12}{2}$ o también Log de 12 menos log de 2, o sea 1,08 — 0,30 = 0,78 que es el logaritmo de 6.

Continúa en la página siguiente.

Por supuesto, esta demostración no quiere ni con mucho suprimir las tablas de logaritmos sólo quiere:

1.° Demostrar el grado de perfección de las matemáticas, y por supuesto, de los logaritmos.

2.° Hemos enseñado, y en un momento a multiplicar y a dividir logaritmos.

3.° Que todo aquel que entienda perfectamente esta demostración, acaba de aprender como poco la **mitad** del cálculo logarítmico.

NOTA: Todos los entretenimientos que hemos puesto en los laterales o ladillos, han sido para aprender jugando o para entretenerse, pero esta demostración (según competentes profesores, que no por mí) es un verdadero hallazgo fruto del trabajo y no (de ninguna manera) del conocimien a fondo de la materia. Yo no puedo prohibir (eso nunca) el que esto se ponga en otros libros ya que lo único que me guía es, que se dé a conocer lo más posible y que el alumno sea el primer beneficiario de ellos, pero SI QUE SE INDIQUE EL ORIGEN DEL ESTUDIO.

AUTOR: Francisco Hernández Aroca

1.b. Cálculo de la mantisa. Teorema de la mantisa

El cálculo de la parte decimal del logaritmo o mantisa requiere cálculos superiores nada fáciles de adquirir. Es por eso por lo que se decidió tabular aquellos logaritmos más usuales, formándose así las tablas de logaritmos cuya utilización veremos posteriormente.

En principio, para encontrar una mantisa en una tabla de logaritmos lo único que tenemos que tener en cuenta es su teorema, teorema que pasamos a enunciar:

"Si cogemos un número cualquiera Z y lo dividimos o multiplicamos por cualquier potencia de 10, veremos que la mantisa del logaritmo de dicho número es la misma y que su característica ha aumentado o disminuido en tantas unidades como indique el exponente de la potencia".

Si suponemos que el número es Z y la potencia 10^k, tendremos:

$$\log (Z \cdot 10^k) = \log Z + \log 10^k$$

Empleando el logaritmo de un producto.

Como el logaritmo de una potencia de 10 es inmediato, podemos poner:

$$\log Z + \log 10^k = \log Z + K$$

Como K es un número entero no influirá para nada en la parte decimal del logaritmo, sólo en la característica. Por esta razón, en las tablas, cuando busquemos una característica no tendremos en cuenta la posición de la coma ni la existencia de ceros al final. Esto influirá únicamente a la hora de determinar la característica.

Ej.: Calcular el logaritmo de 5.400:

$$\log 5.400 = \log 54 \cdot 10^2 = \log 54 + \log 10^2$$

$$\log 5.400 = \log 54 + 2$$

Ej.: Calcular el logaritmo de 0,043:

$$\log 0,043 = \log 43 \cdot 10^{-3} = \log 43 + \log 10^{-3}$$

$$\log 0,043 = \log 43 - 3$$

Ej.: Calcular el logaritmo de 380:

$$\log 380 = \log 38 \cdot 10 = \log + \log 10$$

$$\log 380 = \log 38 + 1$$

2.—CALCULO LOGARITMICO

Para el cálculo de los logaritmos decimales es necesario la utilización de unas tablas que contienen las mantisas de estos logaritmos. En nuestro caso, vamos a utilizar unas tablas que contienen las mantisas de los logaritmos de los 1.000 primeros números naturales y que son de "doble entrada".

Se denominan de "doble entrada" por ser necesario leer en dos direcciones. Las dos primeras cifras del número se encuentran situadas a la izquierda, en la columna encabezada con la letra N, mientras que la tercera cifra se halla situada en la primera fila, encabezada por la misma letra N.

Cuando tengamos que encontrar la mantisa de un número, buscaremos el cauce de ambas.

2.a. Problema directo

Este problema no es más que "dado un número, encontrar su logaritmo".

El paso primero es encontrar el valor de la característica. A continuación se busca el valor de la mantisa, utilizando las tablas.

● **Caso primero.**—"El número, sin la coma, se encuentra en las tablas".

En este caso, están incluidos todos aquellos números que, sin la coma, son menores que 1.000. La lectura de la mantisa es directa, ya que se encuentra en las tablas.

Ejemplo:

$$\log 25{,}3 = 1'4031$$

¿Cómo se ha calculado?

Como la parte entera del número 25,3 tiene dos cifras, la característica de su logaritmo es uno.

A continuación, para el cálculo de la mantisa, nos fijamos en el número, sin la coma (Teorema de la Mantisa), en nuestro caso será el número **253**. Cogemos las tablas y nos fijamos en la parte de la izquierda, en la fila donde se encuentra el número 25 y en la columna encabezada con el número 3; la intersección de ambas nos da la mantisa del número que, en nuestro caso, es "4031".

Ejemplo:

$$\log 0{,}0432 = \overline{2}'6355$$

¿Cómo se ha calculado?

Este número no posee parte entera, por tanto la característica será negativa y valdrá "2", ya que la primera cifra significati-

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS"

9. *Hay un denominador común permanente*, cualquiera que sea la perspectiva desde la que se observe la obra: *Promover e impulsar al alumno a la gimnasia mental de forma DIVERTIDA*. Para conseguirlo, se ha plagado la obra de múltiples ejercicios en los que pasa de lo abstracto a lo concreto, de lo teórico y lo práctico, y viceversa, llevando a cabo una ejercitación mental continuada, pero procurando que, tanto en la exposición de los problemas como en la forma de tratar el contenido haya siempre un poco de sal y de gracia.

Soy un gran amante de los animales y en mi casa tengo varios, de tal manera que hoy viéndolos observo que todos son perros menos dos, todos son gatos menos dos y todos son canarios menos dos. ¿Cuántos animales tengo?

La solución en página 800.

va detrás de la coma es el número cuatro que ocupa la "segunda" posición.

En cuanto al cálculo de la mantisa se realiza de igual forma que en el ejemplo anterior, pero en este caso fijándonos en el número 432. Mirando en la fila 43, columna 2 de las tablas, el cruce nos da el valor de la mantisa, que es "6355".

● **Caso segundo.**—"El número, sin la coma, no se encuentra en las tablas".

En este caso, están incluidos todos aquellos números que, sin la coma, son mayores que el número 999. La lectura de la mantisa no es directa, ya que estos números no se encuentran en las tablas y por tanto su cálculo se realiza por interpolación.

Veamos un ejemplo:

$$\log 25{,}34 = \mathbf{1'4038}$$

¿Cómo se ha calculado?

La parte entera del número 25,34 tiene dos cifras, por tanto la característica de este logaritmo es **uno.**

El problema surge con el cálculo de la mantisa, puesto que el número 2534 no está en las tablas; para resolverlo se interpola de la siguiente forma.

Cálculo:

"Números" ⟶ $2530 < 2534 < 2540$

"Mantisas correspondientes" $\quad 4031 < \quad x \quad < 4048$

Ahora realizamos una correspondencia entre diferencia de números y diferencia de mantisas.

Diferencias Números	Diferencia Mantisa
$2540 - 2530 = \mathbf{10}$	$4048 - 4031 = \mathbf{17}$
$2534 - 2530 = \mathbf{4}$	$= \mathbf{x}$

quedando la siguiente regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ ——— } 17 \\ 4 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \qquad x = \frac{68}{10} = 6{,}8$$

que aproximamos por exceso a 7.

Por tanto la mantisa pedida será:

$$4031 + 7 = \mathbf{4038}$$

NOTA.—Daros cuenta que la mantisa del número 2530 es la misma que la del número 253 y la del 2540 igual que la del 254 (Teorema de la Mantisa).

Ejemplo:

$$\log 2{,}3543 = \mathbf{0{,}3719}$$

Cálculo:

La parte entera del número tiene una cifra, por tanto la característica es **cero.**

Por interpolación calculamos la mantisa:

"Números" ⟶ $23500 < 23543 < 23600$

"Mantisas correspondientes" ⟶ $3711 < x < 3729$

Realizamos la correspondencia entre diferencia de números y diferencia de mantisas.

Diferencia Números	Diferencia Mantisa
$23600 - 23500 = \mathbf{100}$	$3729 - 3711 = \mathbf{18}$
$23543 - 23500 = \mathbf{43}$	$= \mathbf{x}$

quedando la regla de tres siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ ——— } 18 \\ 43 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \qquad x = \frac{774}{100} = 7{,}74 \simeq 8$$

Aproximando por exceso.

Por tanto la mantisa pedida será:

$$3711 + 8 = \mathbf{3719}$$

NOTA.—Igual que en el caso anterior, la mantisa del número 23500 es la misma que la del número 235 y lo mismo en el otro caso, con los número 23600 y 236.

Por tanto, todos los casos planteados se solucionaron de igual forma.

Para conseguir realizar una cosa, el primer paso consiste en creerla posible.

LUIS XIV

El gran objeto de la educación no es el saber, sino la acción.

H. SPENCER

Desde el punto de vista científico, el abejorro no puede volar. Basta, para convercerse de ello, comparar el peso de su cuerpo con la superficie de sus alas. Todas las leyes de la aerodinámica se oponen a que vuele. Pero el abejorro lo ignora y contra todos los principios científicos, se eleva en el espacio, haciendo cada día su pequeña cosecha de polen.

La naturaleza no ayuda a los alcohólicos, a los perezosos y a los débiles de espíritu.

Favorece, por el contrario, a los individuos sobrios, dispuestos, inteligentes y entusiastas, y sobre todo a los que tienen el valor de ser osados, la voluntád de tener éxito y están dispuestos a vivir dura y peligrosaménte. El que rechaza el riesgo pierde lo mejor de su vida.

CARREL

La elección de las carreras se dirige con más facilidad a lo que agrada que a lo que conviene.

DE GAULLE

El abanico tiene su antecesor en el *ábano* que pendido en el techo en la antigüedad, servía para hacer aire.

Es originario del continente asiático y ha sufrido una importante transformación desde los primeros *ripis* griegos y *flabellus* romanos, hasta el japonés plegable con varillas.

Aquellos primitivos eran realizados con plumas de pavo real y hojas. El mango que en estos no había tenido una decoración recargada, en la Edad Media iba a realizarse en marfil y ébano con piedras o metales preciosos incrustados. Más tarde en el siglo *XVI* se adornaron los abanicos con encajes y espejos y se comenzaron a realizar plegables. Ya en el siglo pasado se fabricaban en nácar con plumas de avestruz. A veces eran decorados con pinturas de ilustres artistas de la época.

Forman el abanico, *el país* y la *montura*, ésta puede ser de nácar, madera o bambú, se la denomina también varillaje debido a su formato de varillas planas unidas por un pasador que hace las veces de eje de giro, llamado *clavillo*.

El país está realizado con franjas de papel o piel fina plegadas y unidas a las varillas, las cuales van a encontrarse ya pegadas a la montura.

2.b. Problema inverso

En este caso nos dan el valor del logaritmo y tenemos que encontrar cuál es su número correspondiente, es decir, su "antilogaritmo".

Al igual que en el problema anterior, se presentan dos casos:

● **Caso primero.**—"Cuando la mantisa se encuentra en las tablas". En este caso la lectura es directa.

Ejemplo:

$$\text{Antilogaritmo } 0{,}5478 = \mathbf{3{,}53}$$

Cálculo:

Nos fijamos en la parte decimal del número que es la "mantisa" 5478 y vemos si estas cifras se encuentran en la tabla.

Si miramos detenidamente, veremos que esta mantisa corresponde al número **353**, o lo que es lo mismo, se encuentra en el cruce de la fila 35 con la columna 3.

Ahora nos fijamos en la parte entera del logaritmo 0,5478: vemos que es "cero", por tanto el número que le corresponde tiene que tener una sola cifra entera, así pues colocando la coma en el lugar preciso tenemos el número "3,53".

Podéis realizar como ejercicio el ejemplo contrario, es decir, hallar el log 3,53 y veréis cómo da 0,5478.

Ejemplo:

$$\text{Antilog } 1{,}5478 = \mathbf{35{,}3}$$

Cálculo:

En este ejemplo la mantisa 5478 es la misma que en el caso anterior, así pues le corresponde el mismo número "353". Ahora tenemos que fijarnos en la característica del logaritmo y vemos que es el "uno", esto quiere decir que el número que nosotros queremos encontrar tiene que tener dos cifras enteras. así, pues, colocamos la coma en el sitio preciso y nos queda el número o antilogaritmo "35,3".

Hallar el log 35,3 y veréis cómo sale 1,5478.

Ejemplo:

$$\text{Antilog } \bar{3}'5478 = \mathbf{0{,}00353}$$

Cálculo:

La mantisa (5478) es la misma que en los dos casos anteriores; así, pues, el número será el mismo, es decir, el "353".

Nos fijamos ahora en la característica del logaritmo y vemos que es un "tres" negativo, por tanto la primera cifra del número (antilogaritmo) tiene que ocupar la posición tercera detrás de la coma. Por tanto el número que buscamos es el "0,00353".

Hallar el log 0,00353 y veréis cómo es $\bar{3}$'5478.

● Caso segundo.—"Cuando la mantisa no se encuentra en las tablas". Por tanto, en este caso la lectura no es directa.

Ejemplo:

Antilogaritmo 2,4120 = **258,23**

Cáleulo:

Como en el "caso primero" nos fijamos en la parte decimal del número, es decir, en la "mantisa" 4120, para ver si se encuentran en la tabla. Al mirar en éstas, vemos que está la mantisa "4116", seguida por la "4133", por tanto la muestra "4120" no está. Así, pues, para encontrar el número correspondiente tendremos que interpolar.

"Mantisas"		4116	< 4120 <	4133
↓		↓	↓	↓
"Números correspondientes"	⟶	2258	< x <	259

Realizamos una correspondencia entre diferencia de mantisas y diferencia de números.

Diferencia de Mantisas	Diferencia de Números
4133 — 4116 = **17**	259 — 258 = **1**
4120 — 4116 = **4**	= **x**

quedando la siguiente regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 17 \text{——} 1 \\ 4 \text{——} x \end{array}\right\} \qquad x = \frac{4}{17} \simeq 0{,}23$$

Por tanto, el número será:

$$258 + 0{,}23 = 258{,}23$$

¿Pero es este el número pedido? Para saber si lo es o no, nos tenemos que fijar en la característica del logaritmo que nos dan, que en este caso es un "dos", esto nos quiere decir que el número buscado tiene que tener tres cifras enteras. Así, pues, el número pedido es el "258'23".

Ejemplo:

Antilogaritmo 1,4120 = **25,823**

Durante los siglos XV y XVI se perfeccionaron los relojes y sus mecanismos, pero hasta mediados el siglo XVII no se inicia una nueva etapa en la historia de la relojería en esta época se inventó el péndulo, se perfeccionaron las manecillas y se sustituyeron las complicadas pesas por muelles. Esto inició la industria del reloj casero, los primeros de forma esférica y poco cómodos, fueron llamados "huevos de Nuremberg" la precisión de estos relojes mecánicos se estimaba en un cuarto de hora de error diario por más o por menos. En las observaciones precisas se utilizaban todavía relojes de agua y de mercurio. Galileo empleó relojes de agua en sus célebres experimentos del plano inclinado.

Se ha dicho que el reloj ha sido y es una máquina clave de la época industrial moderna.

El tiempo ese importantísimo regulador de la vida humana se convirtió en algo familiar, el racionamiento del tiempo, la necesidad de aprovecharlo y emplearlo ha impulsado el estudio y descubrimiento de casi perfectos aparatos medidores basados en recientes descubrimientos del cuarzo y de la electrónica.

El gran pensador Zenón de Elea, criticó mucho la matemática a partir de los pensamientos filosóficos, sutiles ideas en uso por aquellos tiempos que llenaban de perplejidad a sus seguidores. Es famosa la paradoja de que si Aquiles ("el de los pies ligeros") hiciera una carrera con una tortuga concediéndole una ventaja inicial, jamás le sería posible alcanzarla (ver dibujo de la parte inferior).

Si Aquiles sale del punto A y la tortuga del B, cuando Aquiles llega al punto B, la tortuga habrá ya llegado al C, cuando Aquiles llegue al punto C, la tortuga se habrá ya desplazado al punto D, y así sucesivamente. Por tanto, le será imposible a Aquiles alcanzar a la tortuga. Es lo mismo que el problema de una flecha disparada por un arco, jamás llegará a dar en la diana, ya que el espacio que tiene que recorrer la flecha se puede dividir en infinitas partes y por tanto la flecha al estar recorriendo infinitas partes jamás llegará a su destino.

Esto sólo son *paradojas* porque la realidad nos demuestra que Aquiles puede alcanzar a la tortuga y la flecha llegará hasta la diana.

Cálculo:

Si comparamos este ejemplo con el anterior veremos que la mantisa del logaritmo es la misma y que lo que varía es la característica que en el caso anterior era "dos" y ahora es "uno".

Por tanto la mantisa no se encuentra en las tablas y hay que interpolar encontrándonos como es lógico con la misma regla de tres del caso anterior.

"Mantisas"		4116	< 4120 <	4133
↓		↓	↓	↓
"Números correspondientes"	⟶	258	< x <	259

Realizamos la correspondencia entre diferencia de mantisas y diferencia de números.

Diferencia de Mantisas	Diferencia de Números
4133 — 4116 = **17**	259 — 258 = **1**
4120 — 4116 = **4**	= **x**

quedando la regla de tres:

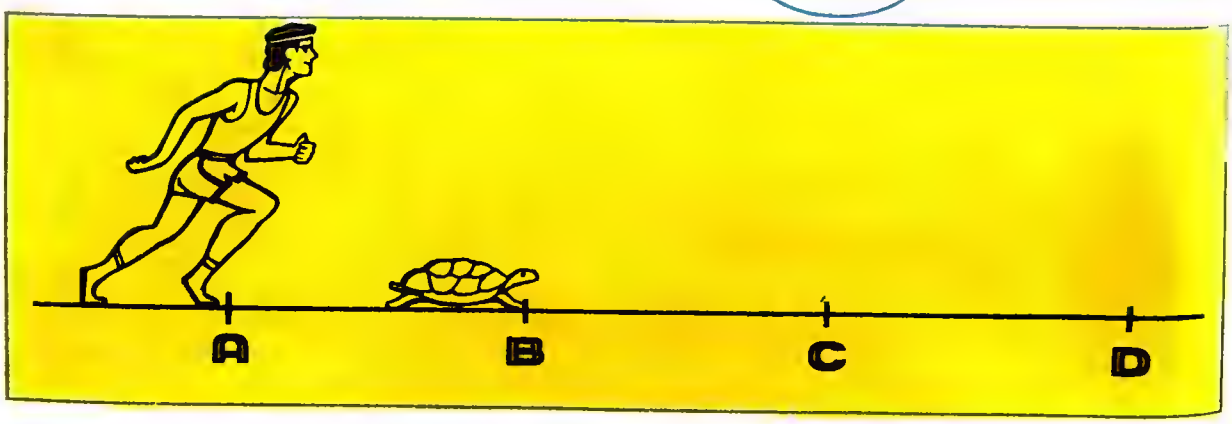
$$\left.\begin{array}{l} 17 \text{ ——— } 1 \\ 4 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \qquad x = \frac{4}{17} \simeq 0{,}23$$

El número será:

$$258 + 0{,}23 = 258{,}23$$

Pero, como en este caso la característica del logaritmo es uno, esto nos indica que el número buscado tiene en realidad dos cifras enteras; por tanto, tenemos que correr la coma un lugar, quedándonos el número

25,823



3.– COLOGARITMO

Denominaremos cologaritmo de un número cualquiera "Z" al logaritmo de su inverso $\frac{1}{Z}$. Para escribirlo pondremos "colog Z".

$$\text{colog } Z = \frac{1}{Z} = \log 1 - \log Z$$

Aplicando el logaritmo de un cociente. Por otro lado, como el logaritmo de 1 es 0 nos queda:

$$\text{colog } Z = - \log Z$$

De lo visto anteriormente se deduce que el cologaritmo de un número es su logaritmo cambiado de signo. Ahora bien, se nos plantea el problema de que la mantisa de un logaritmo no puede ser nunca negativo. Para solucionarlo se procede de la siguiente manera: se resta la unidad a la característica y se suma 1 a la mantisa.

Ej.: Calcular el cologaritmo de 856:

$$\text{colog } 856 = - \log 856$$
$$\text{colog } 856 = - 2{,}9325$$
$$\text{colog } 856 = - 2 - 0{,}9325$$

Al sumarle y restarle, simultáneamente, la unidad la cifra no varía.

$$\text{colog } 856 = -2 - 1 + 1 - 0{,}9325$$

$$\boxed{\text{colog } 856 = \overline{3}{,}0675}$$

Ej.: Calcular el cologaritmo de 26,5:

$$\text{colog } 26{,}5 = - \log 26{,}5$$
$$\text{colog } 26{,}5 = - 1{,}4232$$
$$\text{colog } 26{,}5 = - 1 - 0{,}4232$$
$$\text{colog } 26{,}5 = - 1 - 1 + 1 - 0{,}4232$$

$$\boxed{\text{colog } 26{,}5 = 2{,}5768}$$

Fenicios y Griegos fueron los introductores de la sal en España en el siglo V antes de J. C.; empleando dicha sustancia en salazones de pescados, siendo base de esta industria las salinas de Cardona y Linares. Los visigodos dieron gran auge a las salinas de Tarragona.

Los países medievales se abastecian de las salinas de Venecia y de la costa mediterránea de España y las de la parte de las costas Atlánticas crecieron gracias a la demanda de los países del norte de Europa. La dificultad y el gran coste de los transportes fueron la causa de que las salinas centroeuropeas no pudieran ser explotadas en su totalidad.

La sal fue en la baja edad media, la principal riqueza minera de exportación de los reyes aragoneses. Las salinas cuyo comercio era llevado por italianos y vascos se encontraban en Ibiza y Alicante. Castilla entretanto, comerció con Flandes y fue España junto con Francia y Portugal el principal país exportador durante los siglos XVI al XIX, pero después, al descubrirse más salinas y perfeccionarse la industria conservera, disminuyó la importancia y el comercio de la sal.

Anécdotas de Tales de Mileto.

Existen dos curiosas anécdotas atribuidas al gran matemático Tales.

Era un excelente astrónomo que predijo con exactitud eclipses. Le encantaba pasear por la noche y en una de estas noches oscuras, cayó en una zanja y se tuvo que quedar allí toda la noche, hasta que a las primeras horas de la mañana pasó por allí un labriego y le ayudó a salir. Le reconoció inmediatamente diciéndole, ¿cómo sabéis lo que ocurre en los cielos, si no veis lo que tenéis a vuestros pies?

OTRA

Siendo Tales muy joven se encargaba de transportar mulas cargadas de sacos de sal. Un día, al atravesar un río una de las mulas cayó al agua y ya os imaginaréis lo que ocurrió con la sal que había en los sacos se aligeró bastante su carga. Esa mula se lo aprendió, y al día siguiente y al otro hacía siempre la misma operación en el río. Hasta que al cuarto día, Tales le cambio la carga, puso en los sacos... esponjas.

Ej.: Calcular el cologaritmo de 0,072:

$$\text{colog } 0{,}072 = -\log 0{,}072$$
$$\text{colog } 0{,}072 = -2{,}8573$$
$$\text{colog } 0{,}072 = -2 - 0{,}8573$$
$$\text{colog } 0{,}072 = -2 - 1 + 1 - 0{,}8573$$

$$\text{colog } 0{,}072 = 1{,}1427$$

Como la característica de un número menor que uno es negativa se transforma en positiva al ponerla un menos delante; en nuestro ejemplo concretamente la característica "—2" pasaría a ser "2" y al restarle la unidad me quedaría 2 — 1 = 1, uno será la característica del cologaritmo.

Ej.: Calcular el cologaritmo de 0,00371:

$$\text{colog } 0{,}00371 = -\log 0{,}00371$$
$$\text{colog } 0{,}00371 = -3{,}5694$$
$$\text{colog } 0{,}00371 = -3 - 0{,}5694$$
$$\text{colog } 0{,}00371 = -3 - 1 + 1 - 0{,}5694$$

$$\text{colog } 0{,}00371 = 2{,}4306$$

Ej.: Calcular el cologaritmo de 149:

$$\text{colog } 149 = -\log 149$$
$$\text{colog } 149 = -2{,}1732$$
$$\text{colog } 149 = -2 - 0{,}1732$$
$$\text{colog } 149 = -2 - 1 + 1 - 0{,}1732$$

$$\boxed{\text{colog } 149 = 3{,}8268}$$

Ej.: Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$, calcular sin ayuda de tablas el cologaritmo de 36:

$$\text{colog } 36 = -\log 36$$
$$\log 36 = \log 3^2 \cdot 2^2 = \log 3^2 + \log 2^2$$

Aplicando el logaritmo de un producto:

$$\log 3^2 + \log 2^2 = 2 \log 3 + 2 \log 2$$

Aplicando el logaritmo de una potencia, luego:

$$\log 36 = 2 \cdot 0{,}4771 + 2 \cdot 0{,}3010$$
$$\log 36 = 1{,}5562$$
$$\text{colog } 36 = -1{,}5562$$

Como la mantisa no puede ser negativa sumamos y restamos 1:

$$\text{colog } 36 = -1 - 1 + 1 - 0{,}5562$$

$$\boxed{\text{colog } 36 = 2{,}4438}$$

Ej.: Sabiendo el logaritmo de 2 y el de 5, calcular sin ayuda de tablas el cologaritmo de 1.

$$\log 2 = 0{,}3010$$
$$\log 5 = 0{,}6990$$

$$\text{colog } \frac{1}{250} = -\log \frac{1}{250}$$

$$\log \frac{1}{250} = \log 1 - \log 250$$

Decidle a un amigo que repita cuatro veces y muy rápido la palabra Nueva York (Nueva York, Nueva York, Nueva York y Nueva York). Preguntarle rápidamente, ¿cuál es la capital de Estados Unidos? Os encontraréis con la sorpresa de que la contestación será ¡Nueva York!

¡No señor es Washington!

El noventa por ciento de los preguntados, dará mal la contestación y esto es debido a que al ser Nueva York una de las ciudades de Estados Unidos de América, y haber mentalizado al preguntado con esta respuesta, realiza mal la contestación. Es influenciar en su mente la contestación que nos debe dar. Hacer la prueba y lo veréis.

Otro caso similar al anterior, es llevarlo por cauces distintos. Ejemplos: Decidle a un amigo que conteste rápidamente cuántas son mil treinta y mil treinta.

¡Dos mil sesenta! dirá.

Muy bien, ¿más treinta? ¡Dos mil noventa! contestará. ¡Perfecto! ¿más diez? ¡¡Tres mil!! ¡No señor! Dos mil cien.

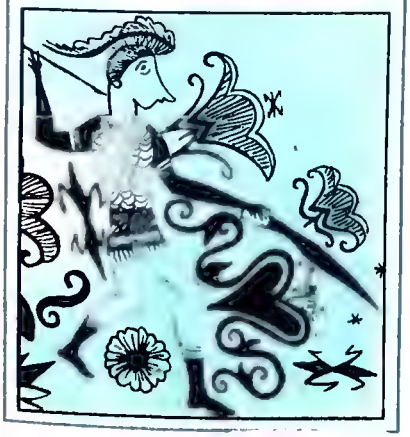
Bien, veamos. A la primera pregunta contesta rápidamente y bien. Ya va confiando en las contestaciones. A la segunda pregunta contesta también bien y ya está plenamente convencido de que el test que está realizando es... facilón.

Luego a la tercera y decisiva pregunta es donde cae.

Haced la prueba.

Fueron los griegos los que primero realizaron retratos de individuos aunque en un principio lo hicieron en la escultura funeraria, que pasó después en la época de Alejandría, al retrato de los héroes. Los etruscos dieron mayor realismo a la realización de estatuas y monedas. Al terminar el Imperio, destacaron los retratos en Palmira y en Egipto. Pero es en el siglo XIV cuando adquirieron más fidelidad con el original, los retratos de los sepulcros de las personas importantes.

La pintura de retratos empieza a tener importancia en el siglo XV destacando a Van Eyck, Van der Weyden, etc. en la escuela flamenca; en Italia destacan entre otros Boticelli y Bellini y en España muy influenciada por los flamencos, destacan Jorge Iglesias y Bartolomé Bermejo. Berruguete creó una mezcla de escuela flamenca y la síntesis del renacimiento italiano.



Aplicando el logaritmo de un cociente. Como el logaritmo decimal de 1 es 0 nos queda:

$$\log \frac{1}{250} = 0 - \log 250$$

$$\log 250 = \log 2 \cdot 5^3 = \log 2 + \log 5^3$$

Aplicando el logaritmo de un producto:

$$\log 250 = \log 2 + 3 \log 5$$

Aplicando el logaritmo de una potencia, luego:

$$\log 250 = 0{,}3010 + 3 \cdot 0{,}6990$$
$$\log 250 = 2{,}3980$$

$$\log \frac{1}{250} = -2{,}3980$$

Como la mantisa no puede ser negativa, se le suma y resta la unidad:

$$\log \frac{1}{250} = -2 - 1 + 1 - 0{,}3980$$

$$\log \frac{1}{250} = 3{,}6020$$

$$\operatorname{colog} \frac{1}{250} = -3{,}6030$$

$$\operatorname{colog} \frac{1}{250} = -3 - 1 + 1 - 0{,}6030$$

$$\boxed{\operatorname{colog} \frac{1}{250} = 2{,}3980}$$

Ej.: Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$, calcular sin ayuda de tablas el cologaritmo de 2,025; además sabemos que $\log 3 = 0{,}4771$.

$$\operatorname{colog} 2{,}025 = -\log 2{,}025$$
$$\log 2{,}025 = \log \frac{2{,}025 \cdot 1000}{1000}$$
$$\log 2{,}025 = \log 2{,}025 \cdot 1000 - \log 1000 = 3$$

Aplicando el logaritmo de un cociente:

$$\log 2{,}025 = \log 2025 - 3$$

$$\log 2025 = \log 3^4 \cdot 5^2 = \log 3^4 + \log 5^2$$

Aplicando el logaritmo de un producto.

El logaritmo de 5 no nos le dan pero podemos calcularlo en base a 10/2.

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$$

$$\log 5 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$$
$$\log 2025 = 4 \log 3 + 2 \log 5$$
$$\log 2025 = 4 \cdot 0{,}4774 + 2 \cdot 0{,}6990$$
$$\log 2025 = 3{,}3064$$
$$\log 2{,}025 = 3{,}3064 - 3$$
$$\log 2{,}025 = 0{,}3064$$
$$\operatorname{colog} 2{,}025 = -0{,}3064$$

Pero es en el siglo XVI cuando el retrato pasa a ser casi la forma predilecta en la pintura occidental, fueron sus mejores creadores, entre otros muchos: Leonardo, Rafael, Veronés, Tintoretto, Durero y el Greco, este último en España. Destaca entre todos en el siglo XVII por su fidelidad para el retrato, Velázquez, quien captaba no sólo los rasgos físicos sino también los psiquicos del modelo. Rubens y Van Dyeck tienen expresión y grandilocuencia dramática así como Rembrandt. Goya realizó el retrato realista y aparatoso y además, trazó el camino, posteriormente para el retrato moderno. A principios del XIX destacan David Delacroix, Ingres..., etc. y a finales Toulouse, Lantrec y Van Gogh, el primero de carácter romántico empezando a descomponer los colores y deformar los retratos, el segundo.

Toda esta disgregación del género del retrato, trajo el cubismo, en donde destacan Gris y Picasso.

Como la mantisa no puede ser negativa tenemos que sumar y restar la unidad con lo que nos queda.

$$\text{colog } 2{,}025 = -0 - 0{,}3064$$

$$\text{colog } 2{,}025 = -0 - 1 + 1 - 0{,}3064$$

$$\text{colog } 2{,}025 = 1{,}6936$$

Ej.: Calcular el cologaritmo de 19:

$$\text{colog } 19 = -\log 19$$

$$\log 19 = 1{,}2788$$

Este logaritmo lo encontramos en las tablas:

$$\text{colog } 19 = -1{,}2788$$
$$\text{colog } 19 = -1 - 0{,}2788$$
$$\text{colog } 19 = -1 - 1 + 1 - 0{,}2788$$
$$\text{colog } 19 = 2{,}7212$$

Solución al problema de las cajas y las monedas de la página 759.

De la cajita donde pone *6 pesetas* (tiene que ser de ésta precisamente y sólo de ésta) sacaremos una moneda.

1.ª conjetura. Si es una moneda de 1 pts., su compañera tiene que ser forzosamente 1 peseta.

2.ª conjetura. Si es una moneda de 5 pts., su compañera tiene que ser también una de 5 pesetas.

¿Por qué? Pues, porque la compañera de 1 pts., no puede ser la de 5 pts., en esta cajita de ser así el rótulo sería *verdadero* y no falso como hemos indicado.

Si hemos sacado 1 pts., las 6 pesetas, estarán en la caja donde pone 10 pts. Si hemos sacado 5 pts., las 6 pts., estarán en la caja donde pone 2 pesetas.

4.—CONCEPTO DE NUMERO e

Podemos definir el número e como: "El límite de la sucesión de término general $fn = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Este concepto de número e se ampliará cuando en un tema posterior se estudien sucesiones y límites. Por el momento es suficiente con el conocimiento de su existencia, ya que es imprescindible en el estudio de los logaritmos neperianos (logaritmos cuya base es el número e).

Para conocer el valor aproximado del número "e" basta con desarrollar su expresión calculando los valores de los distintos términos que aparecen y sumándolos; procediendo de esta manera se llega a:

$$e = 2{,}71828182845 \ldots$$

5.— LOGARITMOS NEPERIANOS

Logaritmos neperianos son aquellos logaritmos que tienen como base al "número e". Estos logaritmos se suelen representar mediante el símbolo **Ln** o **L**, en lugar de log.

$$\text{Ln } x = y \Rightarrow e^y = x$$

Ejemplos:

$$\log_e 5 = y \Rightarrow \text{Ln } 5 = y$$

$$\log_e 1000 = y' \Rightarrow \text{Ln } 1000 = y'$$

Relación entre funciones logaritmicas

En este apartado vamos a ver la relación existente entre logaritmos en distinta base de un mismo número.

Tenemos:

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad (1)$$

$$\log_b x = z \Rightarrow b^z = x \qquad (2)$$

Comparando la expresión (1) con la (2), se obtiene:

$$a^y = b^z$$

Tomamos logaritmo en base a, quedando:

$$\log_a a^y = \log_a b^z$$

Aplicando las propiedades logarítmicas, tenemos:

$$y \cdot \log_a a = z \cdot \log_a b$$

Ahora bien, siempre que la base y el número coinciden, el logaritmo vale uno; por tanto, $\log_a a = 1$, y la expresión anterior resulta:

$$y = z \cdot \log_a b$$

Sustituimos "z" e "y" por su valor logarítmico, quedando

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$$

O bien:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad (A)$$

Expresión que nos indica que sabiendo el logaritmo de un número "x" en una **base a**, podemos saber el logaritmo de ese

DECALOGO DE PRINCIPIOS PSICOPEDAGOGICOS QUE SIRVEN DE ESTRUCTURA BASICA A LA OBRA "MATEMATICAS PARA TODOS"

Creemos que "Matemáticas para Todos" es la única obra de consulta que reúne en sí los cinco requisitos básicos que debieran cumplir los tratados dirigidos a estudiantes en período de formación y que son:

Integral. **Pues** en ella se integran todos los contenidos matemáticos a partir de cero, de forma gradual, bien estructurada y sin lagunas que dificulten el seguimiento natural de contenidos.

Integrante. Pues propicia y facilita el que el alumno "se *apunte*" a adquirir unos conocimientos que, por la forma original, ordenada y relajante con que están expuestos, le anima a "ir a más" a participar a ser sujeto activo.

Continúa en la pág. 786.

Integrada. El alumno termina por hacer suyos esos contenidos, *"vivirlos"*. Para lograrlo, procuramos que los ejemplos, ejercicios y problemas salgan de la vida cotidiana, de la experiencia práctica de cada día, dándoles un entorno y contenido humano.

Divertida. Para ello hemos salpicado la obra de curiosidades, problemas originales, anécdotas divertidas, etc., que sirven de gratificante oasis en el árido desierto de las matemáticas.

Complementariamente formativa en lo humano. Enseñamos matemáticas, pero no olvidamos que la obra se dirige a adolescente en período de formación, por eso aprovechamos, siempre que nos es posible, toda ocasión para enriquecer esa personalidad con contenidos psicológicos o pedagógicos, tales como el funcionamiento básico del acto de conocer, del aprendizaje, la memoria, la percepción, aceptación de las limitaciones humanas, entrenamiento básico para estudiar con aprovechamiento, etc. Conocimientos adicionales que contribuirán a crear unas estructuras mentales sobre las que se puede sentar el edificio de la autorealización personal.

mismo número en otra **base b,** sin más que dividir el logaritmo dado por el logaritmo en base a, de la nueba base b.

Esta fórmula de cambio de base se utiliza, fundamentalmente, tanto para el paso de logaritmos decimales a neperianos como para el paso contrario, es decir, neperianos a decimales.

Paso de logaritmos decimales a neperianos

Fijándonos en la expresión (A), dando a la **base a** el valor de "10" y a la **base b** el valor de "e", se obtiene:

$$\text{Ln } x = \frac{\log x}{\log e} \qquad \text{(B)}$$

NOTA.—El log e = 0,434294.

Sustituimos en (B) el log e por su valor, quedando:

$$\text{Ln } x = \frac{\log x}{0{,}434294}$$

$$\text{Ln } x = \frac{1}{0{,}434294} \cdot \log x$$

$$\text{Ln } x = 2{,}30258 \cdot \log x$$

Por tanto, para calcular el logaritmo neperiano de un número, o bien se divide su logaritmo decimal por 0,434294, o bien se multiplica por 2,30258.

Ejemplo:

Calcular el Ln 25, sabiendo que log 25 = 1,3979.

Solución

$$\text{Ln } 25 = \frac{\log 25}{0{,}434294} = \frac{1{,}3979}{0{,}434294} = 3{,}2187\ldots$$

$$Ln\ 25 = 3{,}2187\ldots$$

O bien:

$$Ln\ 25 = 2{,}30258 \cdot \log 25 = 2{,}30258 \cdot 1{,}3979 = 3{,}2187$$

$$\text{Ln } 25 = 3{,}2187\ldots$$

Ejemplo:

Calcular el Ln 2, sabiendo que log 2 = 0,3010.

Solución

$$\text{Ln } 2 = \frac{\log 2}{0{,}434294} = \frac{0{,}3010}{0{,}434294} = 0{,}6930...$$

$$Ln\ 2 = 0{,}6930...$$

O bien:

$$Ln\ 2 = 2{,}30258 \cdot \log 2 = 2{,}30258 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6930...$$

$$\text{Ln } 2 = 0{,}6930$$

Paso de logaritmos neperianos a decimales

Si nos fijamos en la expresión (B):

$$\text{Ln } x = \frac{\log x}{\log e}$$

Despejamos: $\log x = \log e \cdot \text{Ln } x$

$$\log x = 0{,}434294 \cdot \text{Ln } x$$

O bien:

$$\log x = \frac{\text{Ln } x}{2{,}30258}$$

Así, pues, para calcular el logaritmo decimal de un número, dado su logaritmo neperiano, o bien se multiplica éste por 0,434294, o bien se divide por 2,30258.

Ejemplo:

Calcular log 85, sabiendo Ln 85 = 4,4425.

Solución

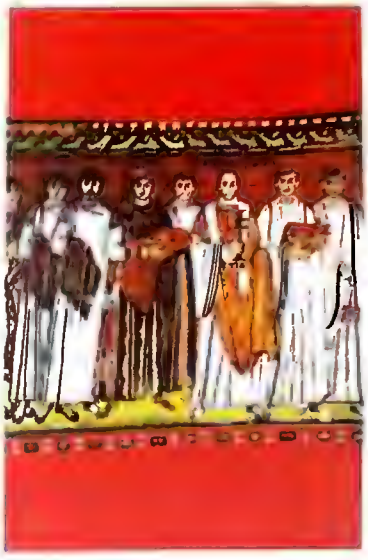
$$\log 85 = 0{,}434294 \cdot \text{Ln } 85 = 0{,}434294 \cdot 4{,}4425 = 1{,}9294$$

$$\log 85 = 1{,}9294$$

O bien:

$$\log 85 = \frac{\text{Ln } 85}{2{,}30258} = \frac{4{,}4425}{2{,}30258} = 1{,}9294$$

$$log\ 85 = 1{,}9294$$



MATEMATICAS BIZANTINAS

Los primeros vestigios que aparecen de estudios matemáticos en Bizancio, datan del año 330 de nuestra era, con la fundación por Constantino de la primera Universidad.

Hubo una enorme dificultad para que entrase a Bizancio la cultura de otros pueblos, ya que existían medidas rigurosas y especialmente contra la Escuela de Atenas, por el peso de la ortodoxia. Siglos después y con la caída del Imperio Latino se experimentó cierto renacimiento matemático y astronómico y primordialmente bajo la larga influencia de los árabes.

Más que verdaderos científicos, los bizantinos fueron "recopiladores" de las ciencias. Fue Gregoras (gran recopilador bizantino en el siglo XIV) a quien se debe el mérito de haber conservado las obras griegas, árabes y orientales que en 1453 y después de la conquista de Constantinopla por los turcos, introdujeron en Italia.

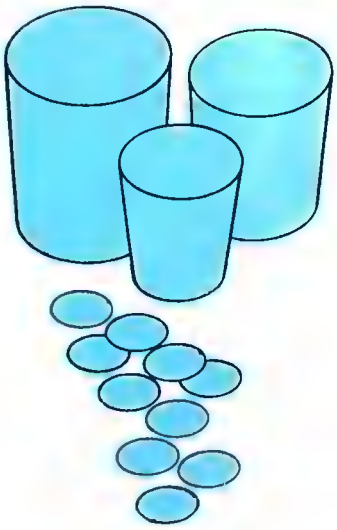
Como dato anecdótico indicamos que a varios científicos griegos los conocemos a través de la cultura bizantina.

PROBLEMA

Tenemos tres vasos y diez monedas. Hemos de meter las 10 monedas en los tres vasos, de tal manera que sin quedar ninguna fuera cada vaso debe tener un número impar de monedas.

¿Cómo hacerlo?

La solución en página 816.



6.—PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Problema 1.—Calcular el logaritmo del número 0,037.

Solución

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la característica. Como se trata de un número menor que la unidad, miramos qué lugar ocupa la primera cifra significativa, en nuestro caso es la segunda, por tanto:

$$\text{característica de } 0{,}037 = \bar{2}$$

Una vez calculada la característica, pasamos a ver la mantisa. Por el teorema sabemos que ni el lugar de la coma ni los ceros la afectan; por tanto, buscamos directamente en las tablas el número 37 y sacamos su valor, con lo que tendremos:

$$\log 0{,}037 = \bar{2},5682$$

Problema 2.—Calcular el logaritmo de 221.

Solución

Miramos primero la característica. Por tratarse de un número superior a la unidad, su característica será el número de cifras enteras menos uno, en nuestro caso el número de cifras enteras es tres, por tanto:

$$\text{característica de } 221 = 2$$

Recordemos que ya se ha explicado en este tema que las características de los número menores a uno son negativas (ejemplo anterior), y las características de los números mayores a uno son positivas.

Después calcularíamos la mantisa, para lo cual iríamos a las tablas de logaritmos y buscaríamos el punto de corte entre la fila del número 22 y la columna del número 1; la cifra que encontremos en dicha casilla será la mantisa de nuestro logaritmo:

$$\log 221 = 2{,}3444$$

Problema 3.—Dados los logaritmos de 2, y de 7, calcular el logaritmo de 4.900 sin emplear las tablas:

$$\log 2 = 0{,}3010$$

$$\log 7 = 0{,}8451$$

Solucion

Lo primero que tenemos que hacer es descomponer el número dado en factores, con lo que tenemos:

$$4.900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Luego:

$$\log 4.900 = \log 2^2 5^2 7^2$$

Aplicando el logaritmo de un producto:

$$\log 4.900 = \log 2^2 + \log 5^2 + \log 7^2$$

Aplicando el logaritmo de una potencia:

$$\log 4.900 = 2 \log 2 + 2 \log 5 + 2 \log 7 \qquad (1)$$

El logaritmo de 2 y el de 7 nos lo da el problema; la única dificultad es saber cuál es el logaritmo de 5, lo cual se puede hacer en base al logaritmo de 10 y de 2, ambos conocidos:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2}$$

Aplicando el logaritmo de un cociente:

$$\log 5 = \log 10 - \log 2$$

$$\log 5 = 1 - 0{,}3010$$

$$\log 5 = 0{,}6990$$

Ya no tenemos más que sustituir en la expresión (1) los logaritmos por sus valores con lo que nos quedaría:

$$\log 4.900 = 2 \cdot 0{,}3010 + 2 \cdot 0{,}6990 + 2 \cdot 0{,}8451$$

$$\log 4.900 = 0{,}6020 + 1{,}3980 + 1{,}6902$$

$$\boxed{\log 4.900 = 3{,}6902}$$

La característica la conocíamos de antemano, puesto que por ser un número mayor que la unidad y con 4 cifras enteras, su característica tenía que ser $4 - 1 = 3$.

Problema 4.—Calcular, sin emplear las tablas, el logaritmo de 25,92, sabiendo que

$$\log 2 = 0{,}3010$$

$$\log 3 = 0{,}4771$$

La invención de la rueda es de suma importancia para la humanidad. Aunque algunos pueblos precolombinos alcanzaron un gran nivel artístico y técnico, , sin conocerla no es menos cierto que el uso de la misma constituyó un gran avance socio-cultural al favorecer los desplazamientos y el transporte de objetos más pesados. El precursor de la rueda fue el rodillo sobre el que se colocaba la masa que se tenía que transportar. En un principio, la rueda estaba unida al eje formando un cuerpo, luego fue perfeccionándose y era libre y podía estar hecha maciza o con sectores vacíos, la más corriente fue la de radios; a la que más adelante se le puso llanta.

Como sabemos, no sólo en el transporte tiene utilidad la rueda, tiene además un uso muy importante en la rueda de alfarero con lo que la cerámica adquirio un gran ímpetu, la rueca para hilar, los molinos de distintas clases, tornos de madera, etc.

Se cree que la inventaron en Asia.

REFRANES

"Quien mucho abarca, poco aprieta».

Significa que quien emprende o toma a su cargo muchos negocios a un tiempo, por lo común no puede desempeñar bien todos.

"Agua pasada no muele molino".

Da a entender la inoportunidad de los consejos después de pasada la ocasión de haber podido aprovecharlos.

"Cada uno quiere llevar el agua a su molino, y dejar seco al del vecino".

Se dice de quien sólo atiende a su propio interés, sin reparar en el daño ajeno.

"Quien no se alaba, de ruin se muere".

Denota lo poco que medran en el mundo los que son demasiado modestos.

"Por delante hago acato, y por detrás el rey malo".

Se dice del que en su presencia lo alaba y en su ausencia lo vitupera.

"Quien el aceite mide, las manos se unta".

Da a entender que los que manejan capital ajeno, suelen aprovecharse de ello.

Solucion

Como no se trata de un número entero, lo primero que hacemos es multiplicar y dividir por 100 para quitarle la coma.

$$\log 25{,}92 = \log \frac{25{,}92 \cdot 100}{100} = \log \frac{2592}{100}$$

Aplicando el logaritmo de un cociente:

$$\log 25{,}92 = \log 25{,}92 - \log 10^2$$
$$\log 25{,}92 = \log 2592 - 2 \quad (1)$$

El problema ahora es calcular el logaritmo de 2.592. Lo descomponemos en factores y nos da:

$$2592 = 2^5 \cdot 3^4$$

Luego:

$$\log 2592 = \log (2^5 \cdot 3^4)$$

Aplicando el logaritmo de un producto.

$$\log 2592 = \log 2^5 + \log 3^4$$

Aplicando el logaritmo de una potencia.

$$\log 2592 = 5 \log 2 + 4 \log 3$$

De donde:

$$\log 2592 = 5 \cdot 0{,}3010 + 4 \cdot 0{,}4771$$
$$\log 2592 = 1{,}5050 + 1{,}9084$$
$$\log 2592 = 3{,}4134$$

Sustituyendo este valor en la expresión (1) nos queda:

$$\log 25{,}92 = 3{,}4134 - 2$$

$$\log 25{,}92 = 1{,}4134$$

La característica podríamos haberla deducido automáticamente, puesto que al ser un número mayor que la unidad con dos cifras enteras (delante de la coma), la característica tiene que ser forzosamente $2 - 1 = 1$.

Problema 3.—Calcular el logaritmo de $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}732 \cdot 23{,}57}{(0{,}002532)^2}}$

Solucion

Aplicamos primeramente el logaritmo de una raíz, con lo que

tenemos:

$$\log \sqrt[3]{\frac{0{,}732 \cdot 23{,}57}{(0{,}002532)^2}} = \frac{\log \dfrac{0{,}732 \cdot 23{,}57}{(0{,}002532)^2}}{3}$$

Ahora si nos fijamos en el numerador, tenemos el logaritmo de un cociente, con lo que la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$\frac{\log (0{,}732 \cdot 23{,}57) - \log (0{,}002532)^2}{3}$$

A continuación aplicamos la operación logaritmo de un producto y la operación logaritmo de una potencia, quedando:

$$\frac{\log 0{,}732 + \log 23{,}57 - 2 \log 0{,}002532}{3}$$

Finalmente, sólo tenemos que calcular los logaritmos. El log de 0,732 es de cálculo directo, mientras que el log de 23,57 y log 0,002532 son con interpolaciones.

- "log 0,732 = $\bar{1}$,8645"

Al ser el número menor que la unidad, ya sabemos que la característica es negativa y como la primera cifra significativa después de la coma es el número 7, que ocupa el lugar primero, sabemos que esta característica es el número uno, negativo. Por otro lado, la mantisa es de cálculo directo, ya que al tener el número sólo tres cifras se puede encontrar en la fila 73, columna 2, dándonos la mantisa 8645.

- "log 23,57 = 1,3724"

Al tener la parte entera del número dos cifras, sabemos que la característica es uno. La mantisa no es de cálculo directo, ya que el número sin la coma tiene 4 cifras, por tanto, tenemos que interpolar:

Números ⟶	2350	< 2357 <	2360
	↓		↓	↓
Mantisas ⟶	3711	< x <	3729

Diferencia de Números	Diferencia de Mantisas
2360 − 2350 = 10	3729 − 3711 = 18
2357 − 2350 = 7	= x

Realizamos la correspondencia:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ ——— } 18 \\ 7 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \quad x = \frac{7 \cdot 18}{10} = \frac{126}{10} = 12{,}6 \simeq 13$$

NUMEROS PRIMOS

Al ser los números una sucesión infinita, los números primos también serán infinitos.

Hoy día, todavia no se ha encontrado un sistema o una fórmula para saber si un número es primo o no (por supuestos, números con muchas cifras, las de pocas ya las sabemos).

El que más se acercó a conocer una fórmula fue Fermat. Dejó escrita la fórmula, pero no hizo la demostración:

"Si N es un número mayor que 2, no hay números enteros A, B y C, tales que A + B = C". "He encontrado una prueba tan asombrosa de calcular los números primos que no caben en este papel". El manuscrito donde Fermat desarrolló la fórmula no ha sido encontrado.

Según la leyenda, el origen de la ciudad de Roma fue como sigue:

La hija de un rey llamado Rea Silvia, tuvo de su unión con el dios Marte dos gemelos a los que se les llamó Rómulo y Remo. Para salvar a sus hijos de las persecuciones que eran objeto, los abandonó en una cuna en el río Tiber. Como los niños gritaban porque tenían hambre, una loba que se encontraba cerca los amamantó y cuando crecieron, y para fundar la ciudad que ambos querían, consultaron el cielo de los pájaros, cosa muy corriente entre los antiguos etruscos, y Rómulo fue el elegido para fundarla.

Siguiendo el rito etrusco para delimitar la ciudad, enganchó una vaca y un buey a un arado, les vendó los ojos, los fustigó, y el surco que hicieron señaló los límites de la futura ciudad.

Según los antiguos historiadores, la fundación de Roma data del 735 antes de J.C., luego Rómulo, para poblar su ciudad, llamó a los vagabundos, y como no había mujeres, raptaron a las de los sabinos, por lo que se organizó una guerra que terminó con la unión de estos dos pueblos, sabinos y romanos.

Por tanto, la mantisa muestra será:

$$3711 + 13 = 3724$$

- "$\log 0{,}002532 = \overline{3}'04034$"

Al ser el número menor que la unidad, la característica es negativa; como, por otra parte, la primera cifra significativa después de la coma ocupa el lugar tercero, tendremos que nuestra característica es el tres negativo. La mantisa no es de cálculo directo, ya que sin la coma es un número de cuatro cifras y hay que intepolar.

$$\text{Números} \longrightarrow 2530 < 2532 < 2540$$

$$\text{Mantisas} \longrightarrow 4031 < x < 4048$$

Diferencia de Números	Diferencia de Mantisas
$2540 - 2530 = 10$	$4048 - 4031 = 17$
$2532 - 2530 = 2$	$= x$

Realizamos la correspondencia.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ ——— } 17 \\ 2 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \quad x = \frac{2 \cdot 17}{10} = \frac{34}{10} = 3{,}4 \simeq 3$$

Nuestra mantisa será: $4031 + 3 = 4034$

Ahora bien, este logaritmo está multiplicando por dos:

$$2 \cdot \overline{3}{,}4034 = \overline{6}{,}8068$$

Con todos estos datos no tenemos más que operar:

$$\frac{\log 0{,}732 + \log 23{,}57 - 2 \log 0{,}002532}{3} =$$

$$= \frac{\overline{1}{,}8645 + 1{,}3724 - (\overline{6}{,}8068)}{3} =$$

$$= \frac{-1 + 0{,}8645 + 1 + 0{,}3724 + 6 - 0{,}8068}{3} = \frac{6 + 0{,}4301}{3}$$

$$= \frac{6{,}4301}{3} = 2{,}1433$$

Por tanto: $\log \sqrt[3]{\dfrac{0{,}732 \cdot 23{,}57}{(0{,}002532)^2}} = 2{,}1433$

Problema 6.—Calcular el antilogaritmo de 1,6958.

Solución

Lo primero que tenemos que hacer es mirar en las tablas para ver si está la mantisa dada. No está, entonces nos fijamos en la inmediata anterior e inmediata posterior.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Mantisas} \rightarrow & 6955 & < & 6958 & < & 6964 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Números} \rightarrow & 496 & < & x & < & 497 \end{array}$$

Diferencia de Mantisas	Diferencia de Números
$6964 - 6955 = 9$	$497 - 496 = 1$
$6958 - 6955 = 3$	$= x$

Realizamos la correspondencia:

$$\left.\begin{array}{l} 9 \text{ ——— } 1 \\ 3 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \qquad x = \frac{3}{9} = 0{,}333 \qquad x \simeq 0{,}3$$

Por tanto, nuestro número será 4963; como la característica es uno positivo, tiene que tener dos cifras enteras, luego:

$$\text{antilog } 1{,}6958 = 49{,}63$$

Problema 7.—Calcular el cologaritmo de 0,428.

Solución

Por definición:

$$\text{colog } 0{,}428 = -\log 0{,}428$$

El problema ahora es calcular el logaritmo de nuestro número. La característica será negativa por tratarse de un número menor que uno y será igual a la unidad, puesto que la primera cifra significativa ocupa el primer puesto detrás de la coma. La mantisa tampoco ofrece dificultad, puesto que por tratarse de un número de tres cifras lo encontramos directamente en las tablas.

$$\log 0{,}428 = \bar{1}{,}6314$$

Luego:

$$\text{colog } 0{,}428 = -\bar{1}{,}6314$$

$$\text{colog } 0{,}428 = -\bar{1} - 0{,}6314$$

En la antigüedad, el uso de los colgantes o pendientes en las orejas era común para hombres y mujeres, se construían de diversas materias y formas como aros de metal, trozos de bambú, plumas, piedras preciosas, cuentas, etc., y sus tamaños variaban desde los grandes, que llegaban a deformarlas, como en el caso de los nobles Incas, a quienes los españoles llamaron orejones, por la gran deformación que les producía, hasta los diminutos que se usaron después, hechos casi todos en piedras preciosas.

Los pendientes como adorno fueron usados ya en la prehistoria en la China, Japón y en la India. La cultura helénica creó adornos de gran riqueza y los pendientes eran tan delicados que Sèneca se llegó a lamentar del despilfarro que suponían. En el siglo XVI se utilizaron en su fabricación esmaltes, metales preciosos y perlas. A partir del siglo XVII destacaron los bellos ejemplares realizados con piedras preciosas. En la actualidad se siguen usando y se emplean en ellos los modernos materiales que permiten toda clase de fantaslas.

ESTRELLAS ENANAS

Estamos plenamente convencidos de que el 99 % de las personas, dirían que estrellas enanas son aquellas estrellas diminutas o más pequeñas de lo normal. Pero, ¿cómo podremos diferenciar cuál es el tamaño normal de éstas? No, estrellas enanas, según el diagrama de Hertzprung-Russell, son aquellas cuya luminosidad intrínseca es más débil que la del sol. Las hay de dos tipos, las ENANAS ROJAS son las llamadas del tipo espectral M, y las ENANAS BLANCAS o las llamadas de tipo espectral B, que tienen una temperatura superficial muy elevada, poseen una débil luminosidad intrínseca. Poseen densidades fabulosamente altas (algunas llegan al millón), la materia degradada hasta tal punto que sus átomos han perdido, en todo o en parte, sus electrones periféricos y así se comprende que al estar sus partículas excesivamente comprimidas, su densidad sea tan elevada.

Como la mantisa no puede ser negativa sumamos y restamos la unidad:

$$\operatorname{colog} 0{,}428 = -\overline{1} - 1 + 1 - 0{,}6314$$

$$\boxed{\operatorname{colog} 0{,}428 = 0{,}3686}$$

Problema 8.—Calcular el cologaritmo de 169, sin tablas logarítmicas y conociendo únicamente el logaritmo de 13:

$$\log 13 = 1{,}1139$$

Solución

Por definición:

$$\operatorname{colog} 169 = -\log 169$$

Para calcular el logaritmo de 169 en base al de 13 lo descomponemos en factores y tenemos que $169 = 13^2$:

$$\log 169 = \log 13^2$$

Aplicando el logaritmo de una potencia:

$$\log 169 = 2 \log 13$$

$$\log 169 = 2 \cdot 1{,}1139$$

$$\log 169 = 2{,}2278$$

Luego:

$$\operatorname{colog} 169 = -2{,}2278$$

Como la mantisa no puede ser negativa, sumo y resto la unidad.

$$\operatorname{colog} 169 = -2 - 0{,}2278$$

$$\operatorname{colog} 169 = -2 - 1 + 1 - 0{,}2278$$

$$\boxed{\operatorname{colog} 169 = \overline{3}{,}7722}$$

Si nos permitieran consultar las tablas sería mucho más rápido, ya que el cálculo del logaritmo de 169 es directo.

$$\operatorname{colog} 169 = -\log 169$$

$$\operatorname{colog} 169 = -2.2279$$

Como la mantisa no puede ser negativa, sumamos y restamos uno:

$$\operatorname{colog} 169 = -2 - 1 + 1 - 0{,}2279$$

$$\boxed{\operatorname{colog} 169 = \overline{3}{,}7721}$$

TEMA 28

CONCEPTOS DE TRIGONOMETRIA

1.—CONCEPTO DE ANGULO.
   1.1.—Sistema sexagesimal.
   1.2.—Sistema centesimal.
   1.3.—Radián.
2.—RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO.
3.—SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO SEGUN EL CUADRANTE.
4.—RELACION ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO.
5.—VALORES DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.
6.—RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS COMPLEMENTARIOS.
7.—RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS SUPLEMENTARIOS.
8.—RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS OPUESTOS.
9.—RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS QUE DIFIEREN EN DOS RECTOS.
10.—REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE.
11.—TABLAS TRIGONOMETRICAS.
   11.1.—Problema directo.
   11.2.—Problema inverso.
12.—PROBLEMAS. SOLUCIONES.

TEMA 28

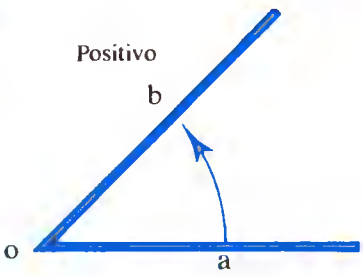
CONCEPTOS DE TRIGONOMETRIA

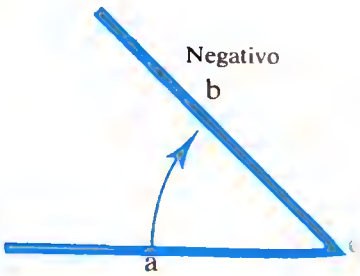
1.—CONCEPTO DE ANGULO

La porción del plano que está limitada por dos semirrectas que tienen un origen común es lo que se denomina normalmente ángulo.

Las dos semirrectas, "a" y "b", que forman el ángulo las denominaremos lados y al origen común de ambas "o" le llamaremos vértice.

Si partiendo de la semirrecta "a" llegamos a la semirrecta "b" moviéndonos en el sentido contrario a las agujas del reloj diremos que el ángulo es positivo, si, por el contrario, el sentido del movimiento es el mismo que el de las agujas del reloj, diremos que el ángulo es negativo.



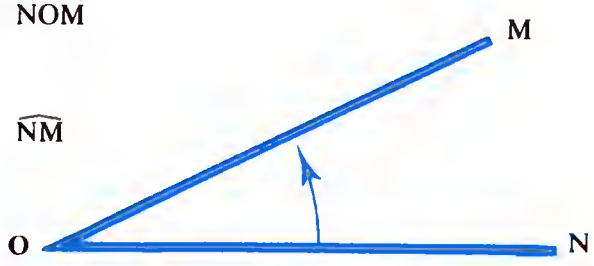


La notación que se emplea normalmente cuando nos referimos a un ángulo es la siguiente:

ángulo $\beta = \widehat{NOM}$

o

ángulo $\beta = \widehat{NM}$



NUMEROS CURIOSOS

1 × 9 + 2 = 11
12 × 9 + 3 = 111
123 × 9 + 4 = 1111
1234 × 9 + 5 = 11.111
12345 × 9 + 6 = 111.111

Multiplicando el número 3.367 por los múltiplos de 33. Veamos lo que ocurre:

3.367 × 33 = 111.111
3.367 × 66 = 222.222
3.367 × 99 = 333.333
3.367 × 132 = 444.444
3.367 × 165 = 555.555

Para realizar la medición de estos ángulos se pueden emplear distintas medidas; las unidades más empleadas son:

— el ángulo completo que realiza todo el giro;

— el ángulo llano, realiza la mitad del giro;

— el ángulo recto, también denominado cuadrante, que realiza un cuarto de giro.

1.1.—Sistema sexagesimal

Un grado en el sistema sexagesimal coincide con la $\frac{1}{360}$ parte del ángulo que realiza todo el giro o ángulo completo.

Si dividimos el grado en 60 partes, todas iguales, cada una de estas partes será denominada minuto.

Si cada minuto lo dividimos en 60 partes iguales obtenemos lo que denominaremos segundo.

Para representar los grados, minutos y segundos emplearemos la notación:

1 grado = 1°

1 minuto = 1′

1 segundo = 1″

Ej.: Realizar la notación de un ángulo que mide 18 grados, 37 minutos y 23 segundos:

18° 37′ 23″

1.2.—Sistema centesimal

Un grado centesimal se obtiene dividiendo al ángulo completo en 400 partes iguales.

A igual que el grado sexagesimal el centesimal es susceptible a divisiones. Si dividimos el grado centesimal en 100 partes iguales obtenemos un minuto centesimal.

Si un minuto centesimal se divide en 100 partes, todas iguales, cada una de ellas se denominará segundo centesimal.

Para representar estos minutos, grados y segundos centesimales emplearemos la notación siguiente:

1 grado centesimal = 1^g

1 minuto centesimal = 1^m

1 segundo centesimal = 1^s

El primer diseño teórico del paracaídas fue realizado por Leonardo da Vinci en el año 1514, pero no se pudo hacer realidad hasta el año 1785 en que Blanchard hizo experimentos con uno de su invención, dejanco caer animales desde un globo.

Después de muchas pruebas fue doce años más tarde, en 1797, cuando se atrevió a lanzarse sobre París, y desde mil metros de altura, el francés Garnerin. Lalande ideó la abertura superior para que salga el aire y aumentar así la estabilidad. El que construyó el paracaídas moderno, como los que hoy se conocen, fue el alemán Kostelesky, en 1912, el norteamericano Berry se lanzó desde un avión en vuelo, todos estos precursores realizaban unas pruebas entre recreativas y deportivas, pero fue Rusia, en 1930, la que inició el paracaidismo con fines militares. En España se fundó, en 1947, la Escuela Militar de Paracaidistas, en Alcantarilla (Murcia), de esta escuela han salido todos los componentes del ejército de tierra y del aire, que nutren posteriormente los club civiles de paracaidistas deportivos.

Como norma de seguridad es una obligación abrir el paracaidas a los 400 metros de altura.

HECHICERIA

Arte de producir ciertos efectos en personas, animales e incluso plantas, por medio de la palabra, la música, el canto y otros sonidos. La mitología griega está llena de estos encantamientos, como héroes o semidioses fueron convertidos en piedras, árboles, animales e incluso en manantiales. Llegaron estas prácticas hechiceras a Italia, donde a sus seguidores se les condenaba a muerte. Se instauró incluso un código (Las doce tablas) donde se instituía esas penas.

Virgilio inmortalizó a la hechicera AMARILIS. Los germánicos también abusaron de estas prácticas, pero más que nada a través de su folklore, donde a los encantamientos de sus hechiceros se oponían los desencantamientos, teniendo estos últimos como protagonistas a un niño, una doncella, un inocente o un príncipe encantador.

Los hechizos igualmente se realizaban por sonidos y aún a grandes distancias, a éstos se oponían el tañer de las campanas que ahogaban los sonidos encantados.

Los hechizos africanos, apagados con el tañer sobre troncos de árboles huecos.

Flautas encantadas, etc.

En China todavía se conservan estos vestigios como folklore nacional, con uso de gongo y címbalos.

Ej.: Realizar la notación de un ángulo que mide 94 grados, 67 minutos y 19 segundos centesimales.

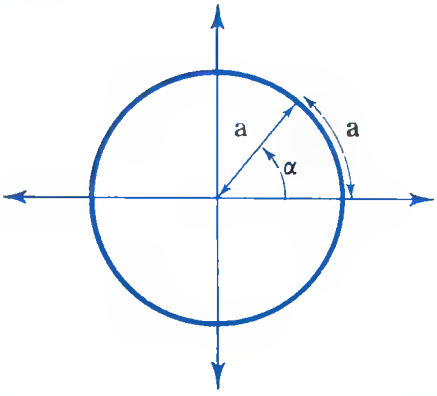
$94^g\ 67^m\ 19^s$

Realizar la notación del ángulo que mide 37 grados, 57 minutos y 86 segundos centesimales:

$37^g\ 57^m\ 86^s$

1.3.—El radián

El radian se puede definir como aquel ángulo cuyo arco tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia.



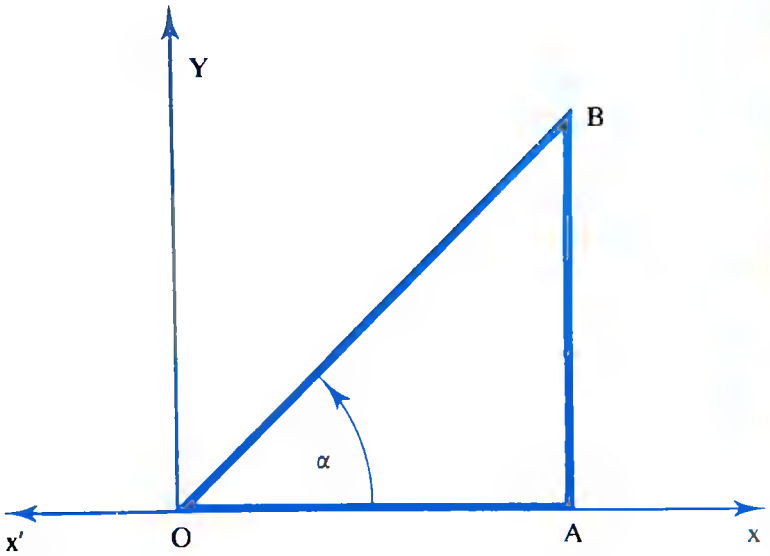
Como ya sabemos, la longitud completa de una circunferencia es de $2\pi r$ el ángulo completo será igual a 2π radiantes, un ángulo llano por ser la mitad de un ángulo completo será igual a π radianes y un ángulo recto, por ser la cuarta parte del citado ángulo completo es igual a $\frac{\pi}{2}$ radianes

Intentaremos ahora, por último, resumir todo lo dicho anteriormente sobre los sistemas realizando un cuadro de equivalencias.

	Sistema sexagesimal	Sistema centesimal	Radianes
1 ángulo recto	90°	100^g	$\pi/2$ radianes
1 ángulo llano	180°	200^g	π radianes
1 ángulo completo		400^g	2π radianes

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

Dado un sistema de coordenadas, representamos un triángulo rectángulo, de tal forma, que hacemos coincidir un vértice con el origen de coordenadas.



Consideremos ahora el ángulo α, de vértice O, comprendido entre los lados OA y OB. Pues bien:

a) "Un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto a él". En nuestro caso será:

$$AB = OB \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Esto implica que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AB}{OB}$$

Por tanto, seno de α es el resultado de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa.

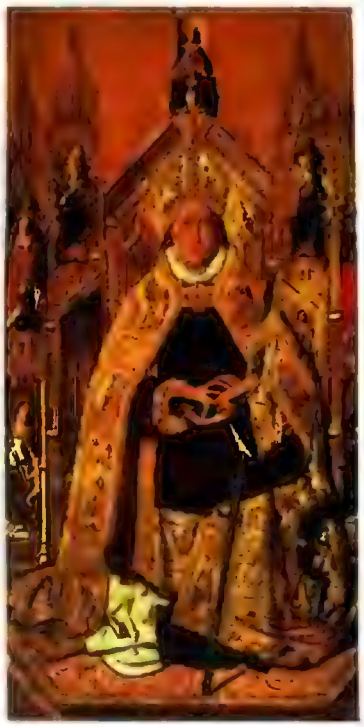
b) "Un cateto es igual a la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente a él". En nuestro caso, será:

$$OA = OB \cdot \cos \alpha$$

Esto implica que:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OB}$$

Por tanto, coseno de α es el resultado de dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa.



La dalmática, como vestido de lujo, la usaron los reyes durante la edad media para las grandes solemnidades y estaban bordadas en púrpura y en oro. Destacan en el museo Vaticano, una atribuida a Carlomagno, y otra, en la catedral de Granada, de los Reyes Católicos, con las iniciales F. Y. Posteriormente fue considerada como vestidura litúrgica y San Silvestre la constituyó como insignia de los diáconos de la Iglesia.

En la actualidad, la dalmática fue permitido usarla a todos los diáconos de la cristiandad. En un principio fueron blancas, aunque ahora sean de distintos colores. También es usada por la Iglesia griega y se parece más a su primitiva forma.

Solución al problema de los animales de la página 774.

Llamaremos x a los perros.
Llamaremos y a los gatos.
Llamaremos z a los canarios.
Llamaremos n al número de ellos.
Y tendremos:

$x + 2 = n$ (ecuación n.º 1)
$y + 2 = n$ (id n.º 2)
$z + 2 = n$ (id n.º 3)
$x + y + z = n$ (id n.º 4)

En la primera ecuación, despejando x, nos da que $x = n - 2$, en la segunda ecuación hacemos lo mismo y tendremos $y = n - 2$; en la tercera igual, y saldrá $z = n - 2$; por lo tanto, al ser la segunda igualdad la misma, la primera también tendrá que serlo, por tanto $x = y = z$. En la cuarta igualdad $x + y + z = n$; es como si dijéramos que $3x = n$, o $3y = n$, y también $3z = n$, o como en la primera ecuación $x + 2 = n$ y en la cuarta, $3x = n$, tenemos que.

$$x + 2 = 3x$$
$$2 = 3x - x = 2x$$
$$x = \frac{2}{2} = 1$$
$$x = 1;\ y = 1;\ z = 1$$

al ser, $x = y = z$
o sea, tengo un perro, un gato y un canario. Entonces, y viendo la función del problema, al tener tres animales, todos son perros menos dos, todos son gatos menos dos y todos canarios menos dos.

c) La tangente de un ángulo α es el resultado de dividir el seno de α entre el coseno de α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Sustituyendo el sen α y el cos α por las expresiones anteriores, tendremos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} : \frac{OA}{OB}$$

Realizamos la operación división:

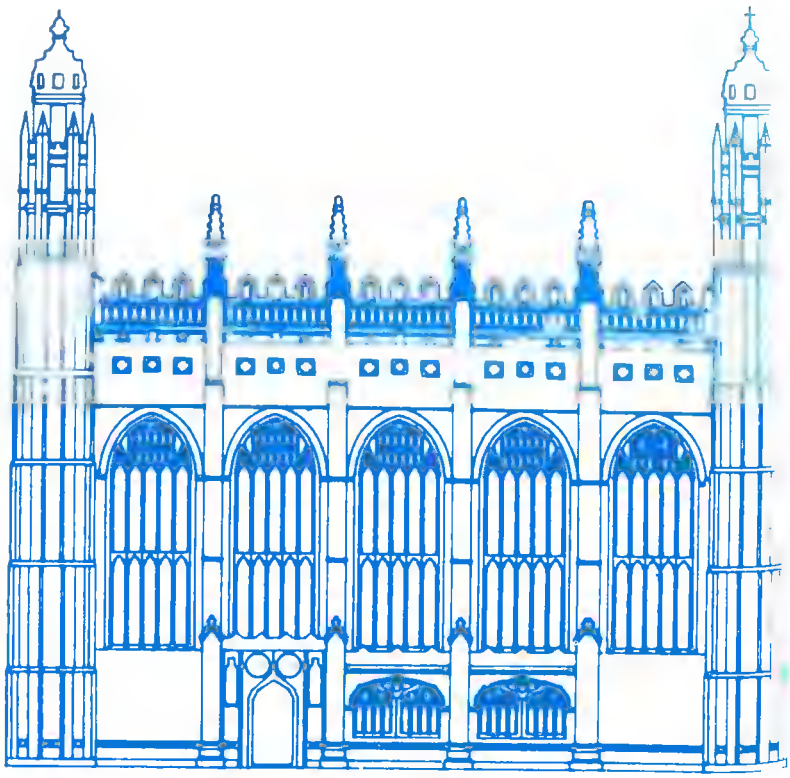
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB \cdot OB}{OA \cdot OB}$$

Los términos OB que multiplican y OB que dividen se anulan, quedando:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA}$$

Por tanto, *tangente de* α es el resultado de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente.

Estas tres razones trigonométricas tienen sus razones recíprocas o inversas.



d) La recíproca del seno de α es la cosecante de α.

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\frac{AB}{OB}} = \frac{OB}{AB}$$

$$\boxed{\text{cosec } \alpha = \frac{OB}{AB}}$$

Por tanto, [illegible] es el resultado de dividir la hipotenusa entre el cateto opuesto.

e) La recíproca del coseno de α es la secante de α.

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{OA}{OB}} = \frac{OB}{OA}$$

$$\boxed{\text{sec } \alpha = \frac{OB}{OA}}$$

Por tanto, [illegible] es el resultado de dividir la hipotenusa entre el cateto adyacente.

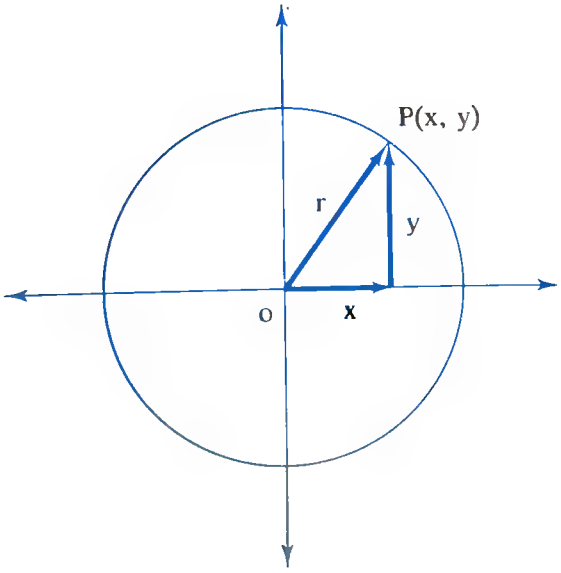
f) La recíproca de la tangente de α, es la cotangente de α.

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{1}{\frac{AB}{OA}} = \frac{OA}{AB}$$

$$\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{OA}{AB}}$$

Por tanto, [illegible] es el resultado de dividir el cateto adyacente entre el cateto opuesto.

Este mismo estudio lo vamos a realizar ahora en el caso de un punto P (x, y) situado sobre una circunferencia de radio r.



Se conoce con el nombre de "Ruta de la Seda", la que cruzó Asia desde el Mediterráneo hasta la China en el principio de la era cristiana, debido este nombre a que la mercancía que se transportaba era principalmente seda.

Sabemos que para criar gusanos de seda, hacen falta unir el clima cálido con abundante mano de obra, cosa que donde mejor se encuentran es en la parte oriental del mundo, por lo que es el Japón, seguido de China, el principal país productor de seda en bruto. En Europa destacan Italia, Grecia y España.

Brasil es el único país americano que la produce.

En España fueron los árabes los que dieron importancia a la sericicultura, destacando Valencia en los siglos XV y XVI.

Tanta significación adquirió en España la industria sedera, que de 1724 a 1767 se aumentaron en Valencia de 2500 telares a 5000, con lo que la exportación de tejidos de seda para Francia e Italia tuvo una gran importancia durante dicho tiempo.

PROBABILIDAD... FACIL

Dos matemáticos se encontraban sentados en la terraza de un café y entreteníanse hablando del cálculo de probabilidades.

—Tirando una moneda al aire (decía el más enteradillo) la probabilidad de que salga, por ejemplo, cara es de 1/2, al igual que al tirar un dado cúbico la posibilidad de que salga un uno es de 1/6. También, pensando que en el planeta existe la misma cantidad de hombres que de mujeres, la posibilidad de que ahora pase por aquí una mujer es de 1/2.

—¿Y la posibilidad de que pasen ahora por aquí dos hombres seguidos? Contestó el otro.

—Muy sencillo, la posibilidad de que esto ocurra sería 1/2 × 1/2, o sea, 1/4, quiere decirse que la posibilidad de que pasasen dos hombres juntos sería de uno contra cuatro.

—¿Y la posibilidad de que pasasen tres hombres seguidos?

—Esa posibilidad es semejante a la anterior, o sea, 1/2 × 1/2 × 1/2, es decir, 1/8, o también uno contra ocho.

—¿Y la probabilidad de que pasasen ahora cuatro hombres seguidos y claro, ninguna mujer?

—¡Pareces tonto, caramba! Te estoy explicando las cosas y no lo entiendes. La probabilidad de que ahora pasasen por delante de nosotros cuatro hombres seguidos y ninguna mujer, sería de 1/2 × 1/2 × 1/2 × 1/2, es decir, 1/16, o lo que es lo mismo, una contra dieciséis.

—Si nos dejan ver (bromeó el sabelotodo) toda esa gente que se ha puesto delante de nosotros, y no se mueven.

continúa en la pág. 803

De acuerdo con las definiciones vistas anteriormente, las razones trigonométricas serán:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{r}{y}$$

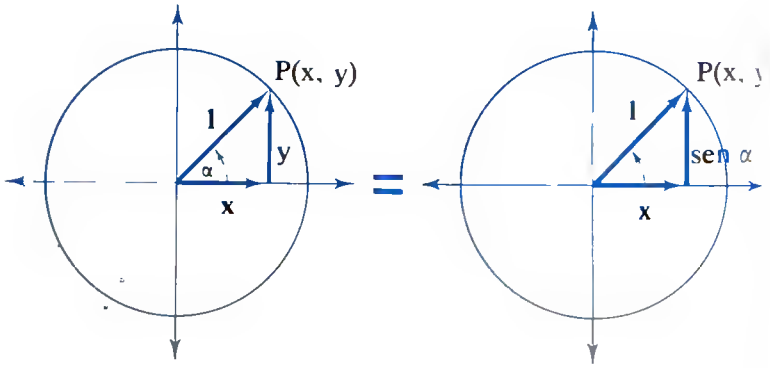
$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}$$

Si ahora consideramos que el radio vale "la unidad", tendremos lo que en trigonometría se denomina **Circunferencia Goniométrica** y las razones seno de α y coseno de α quedarán:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow \text{sen } \alpha = y$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos \alpha = x$$



Los estudios posteriores se realizarán sobre circunferencias goniométricas.

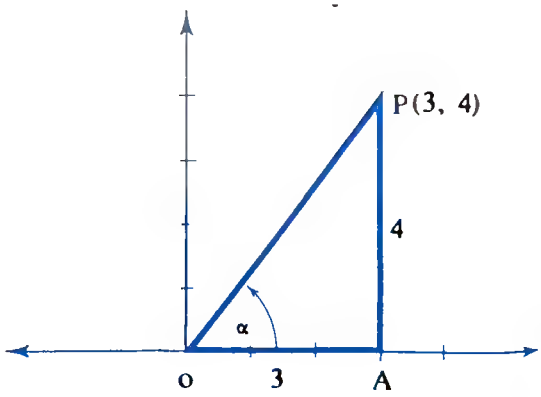
Ej.: Encontrar las razones trigonométricas del ángulo α formado, cuando el punto P es el final de un lado y tiene como coordenados (3, 4):

Solución

OA = 3

AP = 4

OP = ?



No sabemos el valor del lado OP, que en el triángulo es la hipotenusa; por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras podremos calcular cuánto mide.

$$OP^2 = 3^2 + 4^2; \quad OP^2 = 9 + 16 = 25$$

$$OP = \sqrt{25} = 5; \quad OP = 5$$

Una vez que tenemos los valores de los catetos y la hipotenusa podremos encontrar las seis razones trigonométricas, sin más que mirar las definiciones anteriores.

$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{5}{3}$$

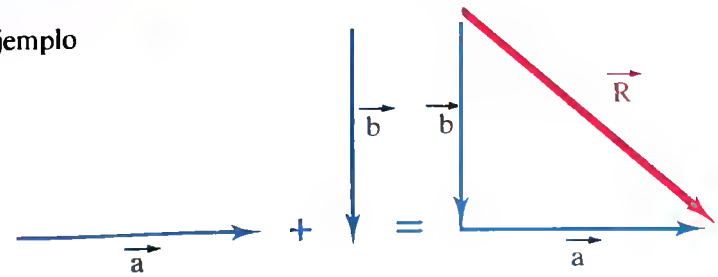
$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{3} = \text{cotg } \alpha = \frac{3}{4}$$

3.—SIGNO DE LAS RAZONES DE UN ÁNGULO SEGÚN EL CUADRANTE

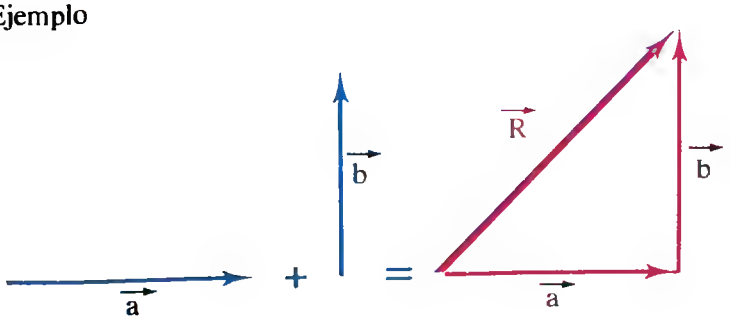
Antes de entrar en la pregunta, conviene recordar de una forma muy general qué es un vector, y a qué es igual la suma de dos vectores que forman un ángulo recto.

Un "vector" es un segmento orientado. Por otro lado, tenemos que "la suma de dos vectores que forman un ángulo recto es otro vector cuyo origen coincide con el origen del primero y el final con el final del segundo.

Ejemplo



Ejemplo



—Bueno (contestó el otro) ¿Y qué posibilidad habría de que pasasen ahora mismo, por ejemplo, **cien** hombres y ninguna mujer?

—A tenor de todo lo que te he expuesto, tú mismo puedes hacer la cuenta, quizá sea una entre un millón. No tienes más que multiplicar 1/2 cien veces.

—De acuerdo, de acuerdo. Ya sé que tú sabes mucho y yo casi nada, pero me gusta aprender... ¡Y tú sabes tanto! Dijo con cierto énfasis. Claro que si en vez de cien hombres seguidos fueran, por ejemplo, MIL, tú, ¿qué cálculo crees que sería? (Aquí ya empezaba éste a tomarle el pelo y lo que es más importante, a llevarlo a su terreno.)

—¡Qué alto grado de inocencia posees! Eso sería una posibilidad entre trillones o cuatrillones o yo que sé... imposible. Mira eso sería tan imposible, que me apostaría una peseta tuya contra mi coche, ahí está la llave de él, saca tú una peseta.

—Te acepto la apuesta, pero con una condición. Que yo elija justo el momento en que empieza la apuesta, ¿estamos?

—De acuerdo, de acuerdo. Puedo permitirme el lujo de darte ese placer tan tonto, ya que, sea cual sea el momento, perderás.

Al cabo de un rato el de la **peseta** dijo:

—¡Ahora empieza la apuesta!

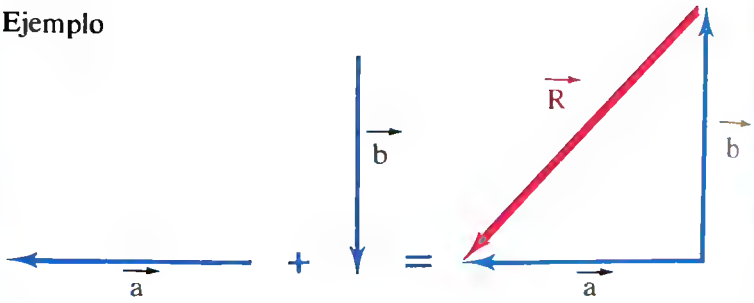
En ese momento comenzó... EL DESFILE MILITAR.

—Toma. Guárdate la llave de... mi coche, ya que te lo acabo de ganar, te lo regalo y como recuerdo esta peseta mía con la condición de que jamas te la gastes, la lleves siempre en el bolsillo y que cada vez que la mires pienses, ¡qué tonto soy!

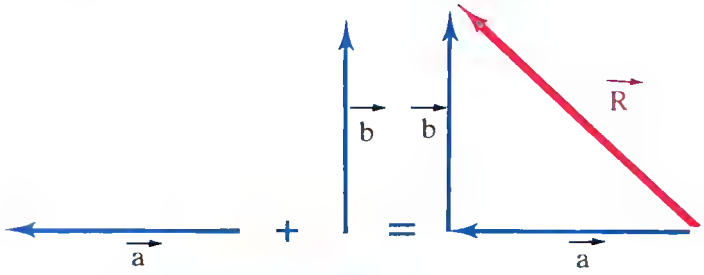
RELATO IMAGINARIO

En un pueblecito de las fronteras española y francesa, y hace de ello montones de años (tantos hace que entonces una peseta tanía algún valor, así como también un franco francés), un anciano de la comarca española estaba siempre borracho..., y no le costaba nada de dinero absolutamente. En el pueblo nadie le invitaba. Veían que todos los días pasaba muchas veces a territorio francés, donde al no conocer a nadie mal podían invitarle. Por la noche, al llegar a su casa su mujer le registraba y veía que siempre llevaba una moneda de cinco duros. Traía locos a los familiares, amigos y a todo el pueblo. Hasta que un día descubrieron sus hazañas e imaginación. Iba a territorio francés con sus CINCO DUROS, allí tomaba un vaso de vino que le costaba UNA peseta le devolvían 240 francos franceses, ya que allí, al cambio por una peseta, daban diez francos, volvía a España, entregaba 240 francos y le daban una moneda de CINCO DUROS, ya que aquí, en España, por 10,5 francos te daban una peseta, o lo que es igual, una peseta valía diez francos y medio. Así pues, siempre estaba borracho gracias a su ingenio y sin gastarse un céntimo, y pagándole las borracheras.... el gobierno español.

Ejemplo

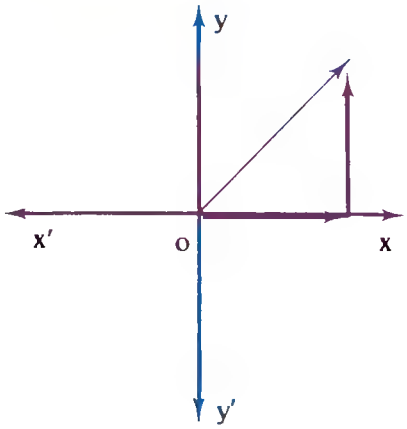


Ejemplo

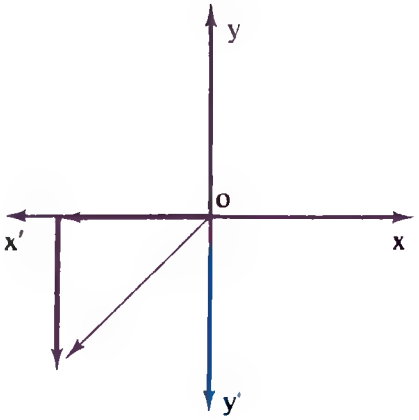


De igual forma, un vector que forma un ángulo con el eje de las x, se puede "descomponer" en sus dos componentes.

Ejemplo

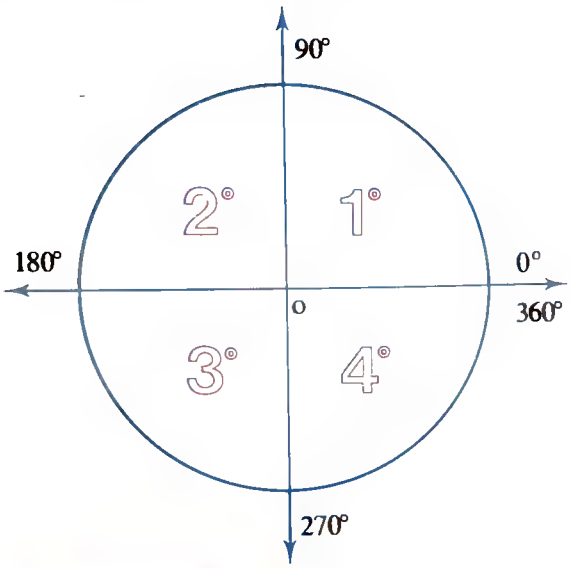


Ejemplo



Teniendo en cuenta esto, así como las zonas positivas y negativas de los ejes cartesianos, pasamos a estudiar los signos de las razones de un ángulo según el cuadrante.

Una circunferencia se divide en cuatro cuadrantes.



En el "primer" cuadrante se encuentran todos aquellos ángulos comprendidos entre 0° y 90°, encontrándose su terminal en este cuadrante.

En el "segundo" cuadrante se encuentran todos aquellos ángulos comprendidos entre 90° y 180°, encontrándose su terminal en este cuadrante.

En el "tercer" cuadrante se encuentran todos aquellos ángulos comprendidos entre 180° y 270°, encontrándose su terminal en este cuadrante.

En el "cuarto" cuadrante se encuentran todos aquellos ángulos comprendidos entre 270° y 360°, encontrándose su terminal en este cuadrante.

Los primeros descubridores de nuevas tierras, fueron en la antigüedad, los navegantes egipcios que para ampliar su comercio exploraron las costas del mar Rojo y del golfo de Aden. Después, los fenicios, en el año 1200 a. de J. C., visitaron el Mediterráneo, crearon fábrica en Gadir o Cádiz y llegaron hasta las islas británicas. El gran Alejandro en el 345 dio a conocer en sus correrías militares las costas del mar de Omán, las riberas del Judo, los desiertos del Asia central y la ruta de la seda.

Los emperadores romanos, en sus conquistas, llegaron hasta la China, Ceilán, Malaca y otras, pero la caída de su imperio paró estos descubrimientos. Hay que esperar a los siglos IX y X para que los escandinavos descubrieran Islandia, aunque fuesen ignorados por los occidentales.

En el siglo XIII, los árabes, al crear rutas comerciales visitaron Insulindia, Siberia y Senegal. Malasia fue descubierta en el siglo XIV. Al conocerse la existencia de estas ciudades y su riqueza, se enviaron misiones cristianas al Asia central. También son de esta época los viajes comerciales del veneciano Marco Polo, que estuvo en China de 1271 a 1295 y hasta 1522.

EL SISTEMA METRICO

Metro viene de la palabra "metran" —medir—. Los franceses la definieron como la $1/10^7$ parte de la distancia que existe entre el Polo Norte y el Ecuador en el meridiano que pasa por París.

Esta medida se fabricó en platino e iridio, formando una barra que representaba esa distancia.

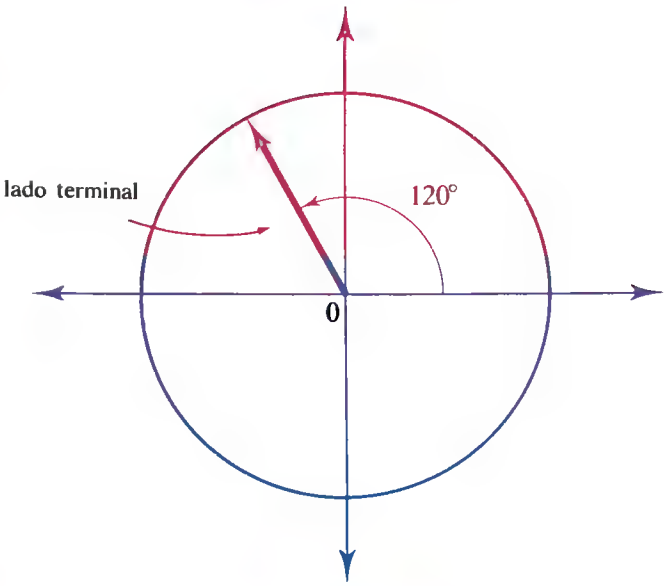
En el año 1960 se estableció una nueva concepción de metro a partir de la longitud de onda de la luz anaranjada del gas infrarrojo, llamado KRIPTON-86. Para estas mediciones de longitud de onda, se emplea un instrumento llamado "interferómetro" dotado de una gran precisión.

Además de los sistemas conocidos y usuales en la medición (deca, hecto, kilo, deci, centi, etc.), existen otros más modernos como son los prefijos "micro y omega" que significan "millonésima parte y millón de veces". Estas medidas son muy importantes en esta era de estudios nucleares y espaciales.

Ej.: Dibujar y decir en qué cuadrante se encuentra el ángulo de 120°.

Solución

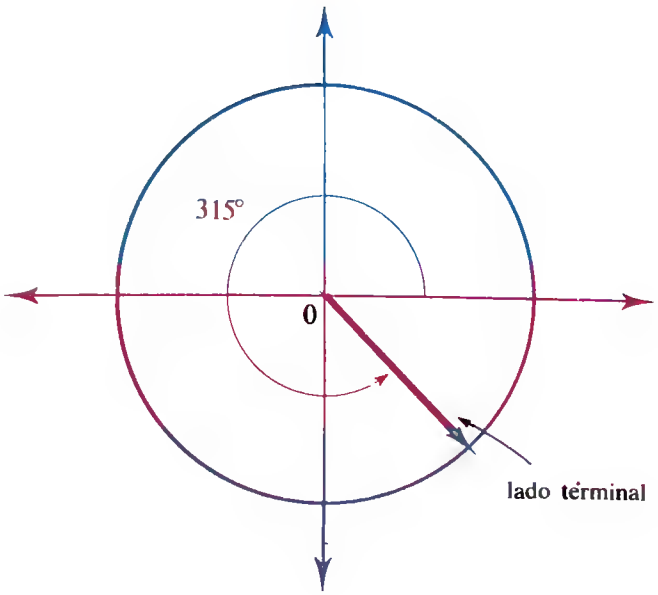
$90° < 120° < 180° \Rightarrow$ 2.° Cuadrante



Ej.: Dibujar y decir en qué cuadrante se encuentra el ángulo de 315°.

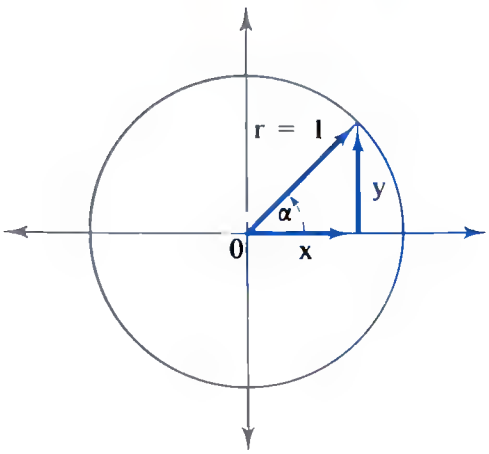
Solución

$270° < 315° < 360° \Rightarrow$ 4.° Cuadrante



Signos de un ángulo del 1.er cuadrante

Para el estudio de los signos tenemos que fijarnos en el vector del lado terminal.



x es un vector que se orienta hacia la zona positiva del eje de las x, por tanto:

$$\cos \alpha = +x \Rightarrow \sec \alpha = +\frac{1}{x}$$

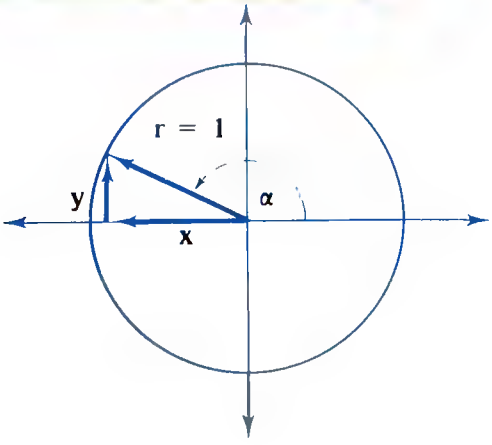
y es un vector que se orienta hacia la zona positiva del eje de las y, por tanto:

$$\text{sen } \alpha = +y \Rightarrow \text{cosec } \alpha = +\frac{1}{y}$$

$$\text{tg } \alpha = +\frac{y}{x} \Rightarrow \text{ctg } \alpha = +\frac{x}{y}$$

Por tanto, en el 1.er cuadrante las 6 razones geométricas son positivas.

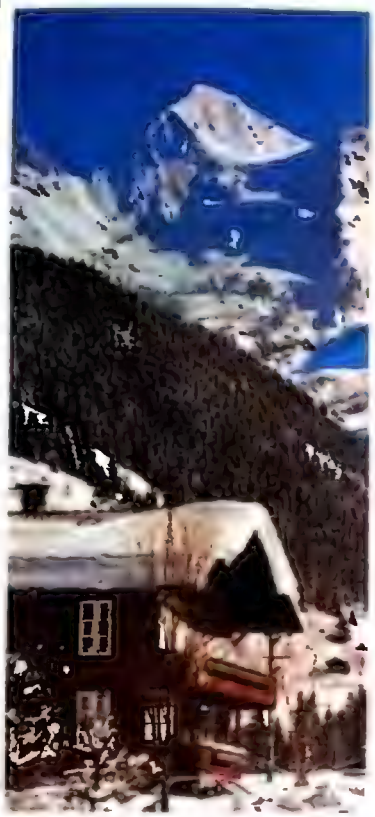
Signos de un ángulo del 2.º cuadrante



La geometría como ciencia se la debemos a la creatividad del espíritu de los griegos, ya que fueron sus filósofos los que a través de siglos se dedicaron en las distintas escuelas filosóficas a la investigación de esta materia, destacando Tales de Mileto, Elea, Endoseo y Euclides, que en el siglo III a. de J. C. y en la escuela de Alejandría dio a conocer sus elementos que daban cima a las investigaciones de tres siglos.

Arquímedes con el cálculo de por aproximaciones sucesivas, cálculo del volumen de la esfera, el cilindro, etc., fue abriendo el camino para el cálculo integral.

En nuestros días la Geometría trae consigo un amplio campo de investigación que abarca de la geometría plana a la de dimensiones, de la geometría algebráica a la diferencial y la topología.



"Quien de joven no aprende, de viejo se muere de hambre".

"Quien mucho abarca poco aprieta".

"Más vale maña que fuerza".

"Quien se hace oveja, el lobo se la come".

"Lo que bien se aprende mal se olvida".

"Hombre prevenido vale por dos".

"No pidas a quien pidió ni sirvas a quien sirvió".

"Grata es la subida e ingrata la descendida".

"Del amigo adulador libranos señor".

x es un vector que se orienta hacia la zona negativa del eje de las x, por tanto:

$$\cos\alpha = -x \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{1}{x}$$

y es un vector que se orienta hacia la zona positiva del eje de las y, por tanto:

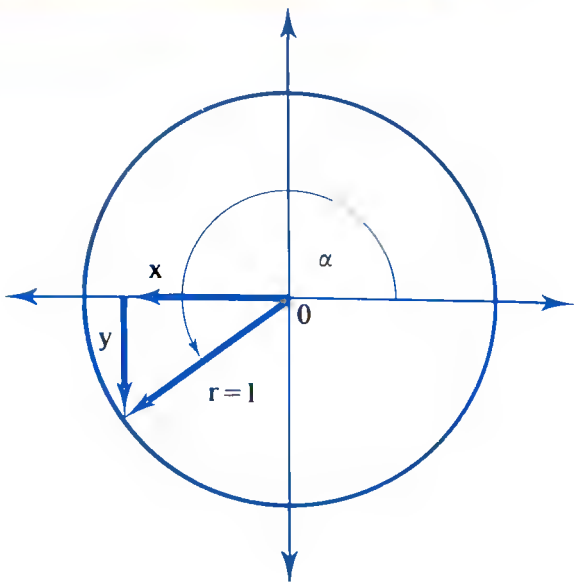
$$\operatorname{sen}\alpha = +y \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = +\frac{1}{y}$$

Como:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{x}{y}$$

Por tanto, en el 2.º cuadrante hay cuatro razones negativas y dos positivas.

[redacted]



En este cuadrante x es un vector que se orienta hacia la zona negativa del eje de las x, por tanto:

$$\cos\alpha = -x \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{1}{x}$$

y es un vector que se orienta hacia la zona negativa del eje de las y, por tanto:

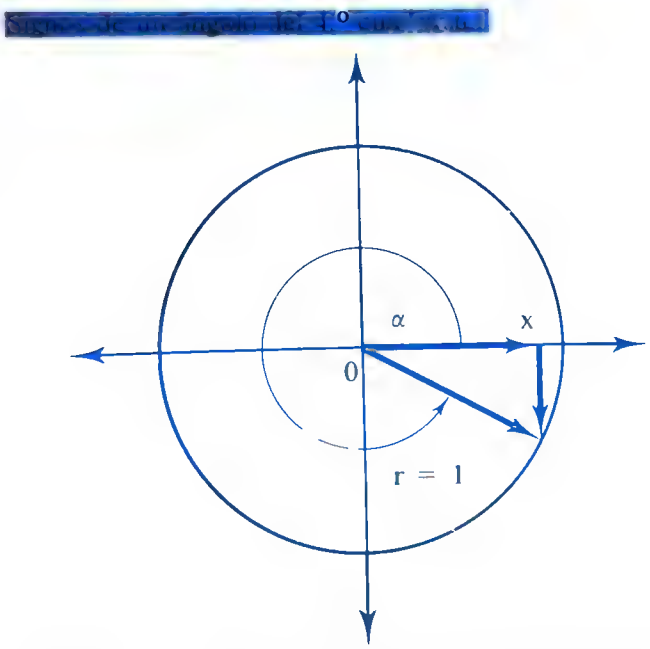
$$\text{sen } \alpha = -y \Rightarrow \text{cosec } \alpha = -\frac{1}{y}$$

Como:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}; \text{ por tanto:}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}$$

Por tanto, en el 3.er cuadrante hay cuatro razones negativas y dos positivas, pero diferentes a las del caso anterior.



En este, x es un vector que se orienta hacia la zona positiva del eje de las x, por tanto:

$$\cos \alpha = x \Rightarrow \text{sec } \alpha = \frac{1}{x}$$

y es un vector que se orienta hacia la zona negativa del eje de las y, por tanto:

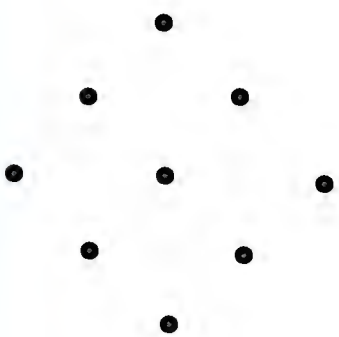
$$\text{sen } \alpha = -y \Rightarrow \text{cosec } \alpha = -\frac{1}{y}$$

Camili Baldi, italiano, escribió en el año 1622 su obra "El arte de conocer por el examen de una carta misiva las costumbres del escritor", con lo que relacionó, por primera vez, el carácter y la escritura; aunque fue el francés Jean Hippolyte Michon el que, en 1806, creó un "Sistema de grafología" que, posteriormente, perfeccionó otro francés, Crepieux-Jamin, que diferencia siete géneros básicos y casi 200 especies. Al combinarse algunos signos de la escritura con grafismos, vemos que resultan de apoyo para definir la personalidad. Para poder hacer un análisis grafológico se ha de tener de 10 a 15 líneas manuscritas.

La Grafología tiene aplicación en Siquiatría, sicoanálisis, Sicopedagogía, etc. Las grandes empresas comerciales utilizan la Grafología para la selección de su personal con miras al conocimiento de la iniciativa, moralidad, inteligencia, etc.

Las personas estudiosas de la Grafología se les llama peritos calígrafos o grafólogos.

Unir los nueve puntos siguientes con solamente **cuatro rectas** y **sin levantar el lápiz del papel.**



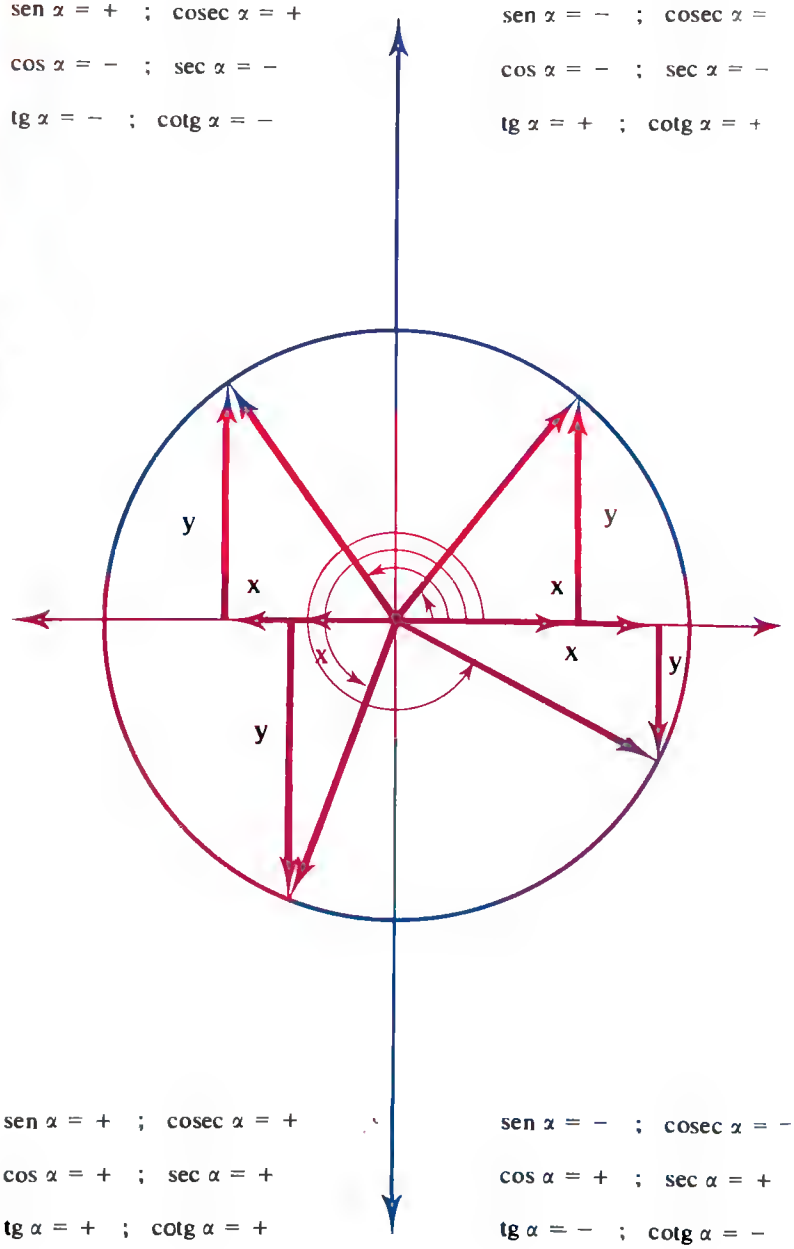
La solución en la pág. 832.

Como:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x}, \text{ por tanto:}$$

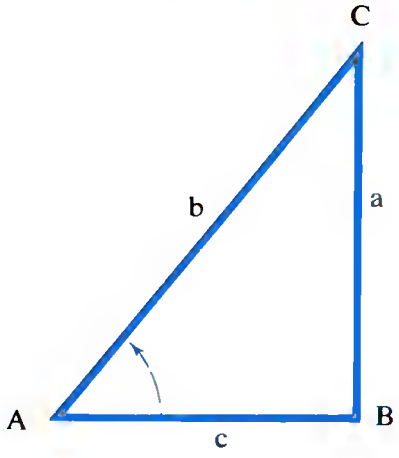
$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{x}{y}$$

Así pues, haciendo un dibujo compendio de todo lo anterior tendremos:



4.—RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

Vamos a fijarnos en el triángulo rectángulo ABC.



Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Si ahora dividimos ambos miembros de la igualdad por b^2, quedará:

$$\frac{b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}$$

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} \qquad (1)$$

Recordando que:

$$a = b \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$c = b \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{c}{b}$$

La expresión (1) se transforma en:

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

Expresión que nos permite calcular el seno de un ángulo α, cuando nos dan el coseno del mismo ángulo y viceversa.

Si ahora la expresión

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Con el descubrimiento de América por Colón, en 1492, se favorecieron otros grandes descubrimientos, originados unos en la necesidad del oro y las especias de la India y otros en los deseos de evangelizar a los indígenas. El progreso de la navegación de altura donde las carabelas y después los galeones la hicieron más segura, favoreció los viajes.

Navegantes portugueses descubrieron, antes de 1492, el Senegal, Etiopía y el cabo de Buena Esperanza. Vasco de Gama, las costas de la India.

El primer viaje alrededor del mundo lo emprendió Magallanes, en 1520, entrando en el Océano Pacífico por el estrecho que ahora lleva su nombre, y lo completó Juan Sebastián Elcano, siendo los navegantes españoles que se lanzaron al descubrimiento y conquista de nuevas tierras, destacando los extremeños.

La conquista de nuevas tierras trajo consigo grandes ventajas socioeconómicas por la entrada de nuevos productos, con lo que el comercio entre ellas y la metrópoli se intensificó, creando riquezas, y al tomar contacto con otras formas de vida y de gobierno se amplió la cultura.

Los primeros cristianos, para nombrar los libros decían "las escrituras" y los griegos les dieron el nombre de "la Biblia", "los libros", nombre que pasó al latín como **Biblia.**

La Biblia transmite un mensaje de Dios que habla a los cristianos a través de los autores del Antiguo y Nuevo Testamento.

La mayor parte de los libros del Antiguo Testamento, se escribieron en hebrero y en arameo y los del Nuevo en griego y arameo.

De las distintas traducciones de la Biblia vamos a destacar algunas como la de San Jerónimo al latín, en el siglo IV a. de J. C.; la primera traducción al castellano, la no católica de C. de Valera, en 1602, y la primera castellana católica la de P. F. Scio de San Miguel, en 1791. Ultimamente, la de mayor divulgación, son las de Nacar-Colunga, en 1944, y la de Bover-Cantera, en 1948.

continúa en la pág. 813

la dividimos por a^2, quedará:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \qquad (2)$$

Recordando que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{c}{a}$$

La expresión (2) se transforma en:

$$\boxed{\text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha}$$

Expresión que nos permite calcular el valor de la cotangente de un ángulo α, cuando conocemos la cosecante de ese mismo ángulo

Tomemos ahora la misma expresión:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

La dividimos en este caso por c^2, quedando:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1 \qquad (3)$$

Recordando que:

$$\cos \alpha = \frac{c}{b} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{c}$$

La expresión (3) se transforma en:

$$\boxed{\sec^2 \alpha = \text{tg}^2 \alpha + 1}$$

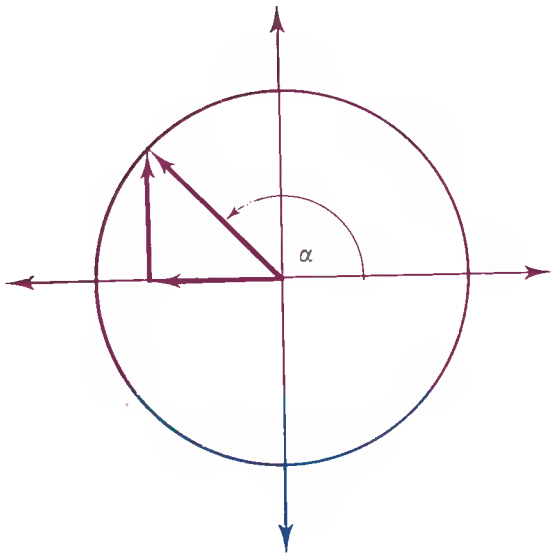
Expresión que nos permite calcular el valor de la secante de un ángulo α, conociendo el valor de la tangente del mismo α y viceversa.

Así, pues, con estas tres relaciones fundamentales podremos calcular las razones trigonométricas de un ángulo, dada únicamente una razón y el cuadrante donde se encuentra el lado terminal del ángulo.

Ej.: Si sen $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular las restantes trigonométricas del ángulo α.

Para realizar el ejercicio correctamente, lo primero que tenemos que hacer es saber en qué cuadrante está localizado el lado terminal del ángulo que nos dan. En este caso, nos dice el enunciado que el ángulo α es mayor que 90° y menor que 180°, por tanto, nuestro lado terminal está localizado en el segundo cuadrante, y a la hora de realizar el ejercicio tendremos que tener en cuenta los signos que tienen las razones trigonométricas en este cuadrante:

sen α = +
cos α = −
tg α = −
cot α = −
cosec α = +
sec α = −



Ahora tomamos la relación fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \alpha = 1$$

Despejamos $\cos^2 \alpha$:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La Biblia ha servido de inspiración, desde los primeros cristianos, para la creación de pinturas, esculturas, tapices y miniaturas, de tal manera, que mirando las distintas Biblias ilustradas se ve la evolución del arte miniaturista a través del tiempo.

En España la Biblia más antigua con miniaturas es la de León, en el 920; la Hispalense, en el siglo X, y las mozárabes de San Millán y San Isidoro. En Francia la Biblia de Limoges, en el siglo XII, y en este mismo siglo las Biblias de Lambeth y Winchester, en Inglaterra. En las bibliotecas de París y del Vaticano están las Biblias españolas de San Pedro de Roda y de Ripoll, respectivamente.

Alfonso X el Sabio mandó hacer en romance la Biblia de la que se conservan en el Escorial un manuscrito del siglo XIII y otros de dos siglos XIV y XV.

En el siglo XV destaca la Biblia de estilo gótico de la casa de Alba y en el Renacimiento, los ejemplares de Italia fueron los más hermosos.

La Biblia políglota complutense es la primera en su género, realizada en la Universidad de Alcalá y patrocinada por el cardenal Cisneros, posteriormente, Felipe II introdujo en ella algunas correcciones.

Las bibliotecas más antiguas que se conocen son las de Asiria y Babilonia. Existían rollos de papiro en Egipto de 3000 años antes de J. C. y Tolomeo I fundó la biblioteca de Alejandría en el siglo IV antes de J. C. y que contenía entre 200.0000 y 700.000 papiros. Esta última fue destruida por los árabes.

La primera biblioteca romana la fundó Cneo Annio Polión, treinta y ocho años antes de J. C. Después destacó la Octaviana fundada por Julio César y que ardió por culpa de Nerón al incendiar Roma.

Ante las invasiones bárbaras, los libros que tenían los cristianos en sus bibliotecas de Cesarea Hipona y Antioquía, que eran muchos, tuvieron que guardarlas en los monasterios y en tiempos de los árabes destacan las bibliotecas de Córdoba y Bagadad.

Pero cuando las bibliotecas adquieren su mayor impulso es con la invención de la imprenta que, unida a las diferencias de la Reforma y Contrarreforma, se hizo más grande la busca de las noticias e impulsaron la creación de las bibliotecas en las universidades.

Como en nuestro caso el ángulo tiene un coseno negativo, de las dos soluciones que nos dan sólo tomamos una, que será:

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por otro lado, si

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = 2$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec \alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

pero no se debe dejar un denominador con raíces, por tanto, tendremos que racionalizar, quedando:

$$-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

luego:

$$\sec \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Como:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} : \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Racionalizamos, quedando

$$-\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Si

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

Racionalizamos y queda:

$$\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Ej.: Si $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

El enunciado me dice que el ángulo α es mayor que 180° y menor que 270°, por tanto, el lado terminal de "α" se encuentra en el tercer cuadrante, factor que tendremos presente a la hora de colocar los signos de las razones.

$\operatorname{sen}\alpha = -$

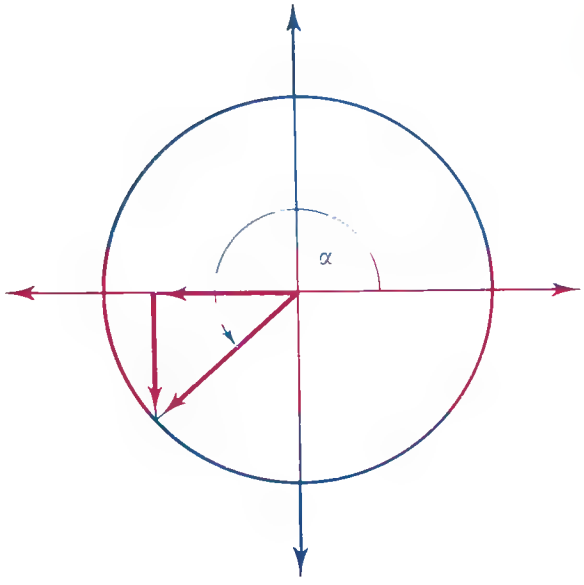
$\cos\alpha = -$

$\operatorname{tg}\alpha = +$

$\operatorname{cosec}\alpha = -$

$\sec\alpha = -$

$\operatorname{cotg}\alpha = +$



Como el ejercicio nos da el valor de la tangente de α, partimos de la relación fundamental:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$$

Sustituimos

$$1 + (1)^2 = \sec^2\alpha$$

Operando, tenemos:

$$1 + 1 = \sec^2\alpha; \quad 2 = \sec^2\alpha; \quad \sec\alpha = \pm\sqrt{2}$$

Al estar al lado terminal del ángulo en el tercer cuadrante, el valor de la secante es negativo; por tanto, de los dos valores sólo tomamos uno:

$$\sec\alpha = -\sqrt{2}$$

Por otro lado:

$$\sec\alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

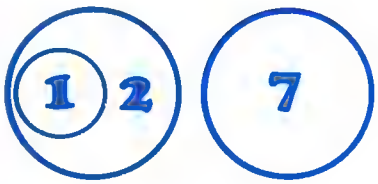
Las bibliotecas pueden ser particulares y oficiales. Las primeras son difíciles de calificar, pues no son competencia del Estado. Las segundas se subdividen a su vez en estatales, provinciales o municipales. La "Biblioteca Nacional de España" fue creada en un principio por Felipe V, en 1712, con 8000 volúmenes y estableció que los autores editores e impresores de libros debían dar dos ejemplares de cada publicación al fondo de la biblioteca que se llamaba "Librería real". Posteriormente, cuando el reinado de Isabel II se hizo el edificio actual del paseo de Recoletos por el arquitecto Francisco Jareño y fue dirigida por don Marcelino Menéndez y Pelayo. Tiene un total de 2.275.000 de volúmenes y sobre 10.000.000 de fichas ingresan anualmente de 12.000 a 15.000 volúmenes españoles y extranjeros, además de todas las revistas importantes. Tiene 21 kilómetros de pasillos y galerías.

La URSS tiene las bibliotecas más importantes de Europa: la Lenin con 13.000.000 de volúmenes, la estatal de Leningrado con 10.000.000 de volúmenes, la de la Academia de Ciencias con más de 8.000.000 de volúmenes.

Luego están la del museo británico en Londres con 6.000.000 de volúmenes, la de Cambridge con 15.000.000 de volúmenes, la de París con más de 6.000.000 de volúmenes.

Solución al problema de los vasos y las monedas de la página 788.

La solución es bien fácil. Metemos un vaso que tenga monedas par, en otro que las tenga impar y así ese conjunto de monedas par pertenece al conjunto de monedas impar, o sea, en una palabra, ¿no recuerdas los conjuntos o los subconjuntos? Aquí formamos un subconjunto.



Otra solución

Así, busca tú otras soluciones.

Racionalizamos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizamos ahora la relación fundamental: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Sustituimos: $\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{-\sqrt{2^2}}{2} = 1$

Operamos: $\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{2}{4} = 1$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{2} = 1$$

Despejamos $\operatorname{sen}^2\alpha$: $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizamos y queda: $\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como en los casos anteriores tenemos dos operaciones pero como el lado terminal del ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, sólo es válido el valor negativo; así, pues:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

Si ahora racionalizamos, nos queda:

$$\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

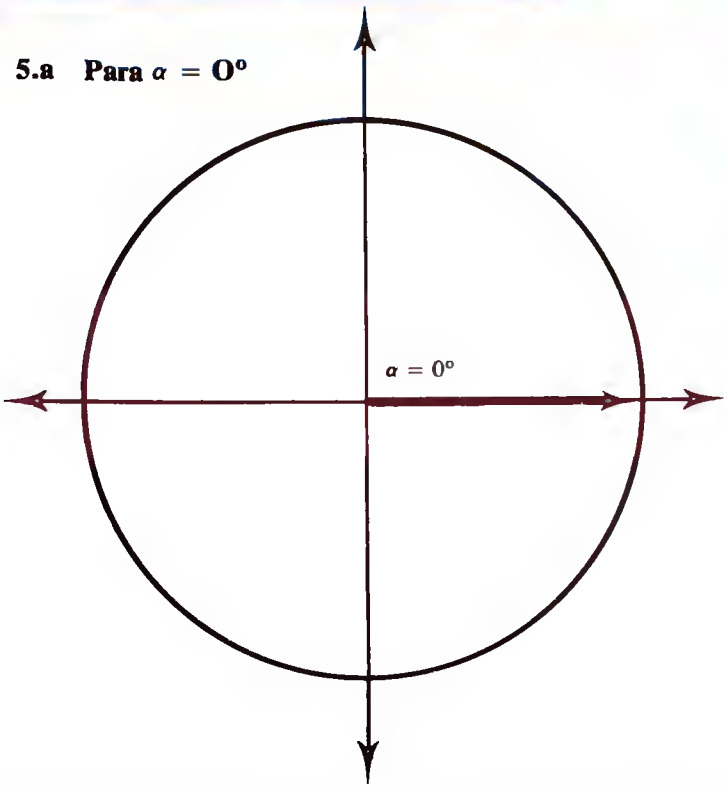
Por tanto:

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{2}$$

Como: $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = 1$

5.– VALORES DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS O°, 30°, 45°, 60°, 90°

5.a Para $\alpha = O^o$



Si el ángulo α es O°, el vector representante se encuentra situado en el primer cuadrante, sobre el eje de las X.

Mirando a la figura se deduce por tanto.

$$\text{sen } O^\circ = O \quad \Rightarrow \quad \text{cosec } O^\circ = \frac{1}{O} = \infty$$

$$\cos O^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad \sec O^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{tg } O^\circ = O \quad \Rightarrow \quad \text{cotg } O^\circ = \frac{1}{O} = \infty$$

La rueda de alferero fue introducida en Mesopotamia por los norteños en el año 4000 antes de J.C., aunque en Egipto no se usó hasta después, ye que usaban los alfareros egipcios la rueda movida con le mano. Lo mismo en Mesopotamia como en Egipto, la cerámina es de poco mérito y sólo para usarla, ye que las vasijas importantes se hecían en piedra o metal. Sin embargo en Creta, que conoció mucho más tarde la rueda de alfarero, (fue sobre el eño 2000 antes de J.C.) se hicieron los mejores recipientes de la entigüeded.

Los alfareros cretenses adelgazaron la cerámina hasta el extremo de hacerla como una cáscara de huevo, pintándola de colores vivos con escenas naturales.

En Europa, hesta el fin del año 2000 entes de J.C. no se conoce el uso de la rueda de alfarero y no existen ceráminas importantes, lo contrario que en Asia, donde la dinastía Chang en China tiene gran relevancia, destacando la de arcilla blanca (caolín) y que se usaba, principalmente pera la creación de vesos ceremoniales.

ESTUDIOS SOBRE SISTEMAS DE NUMERACION

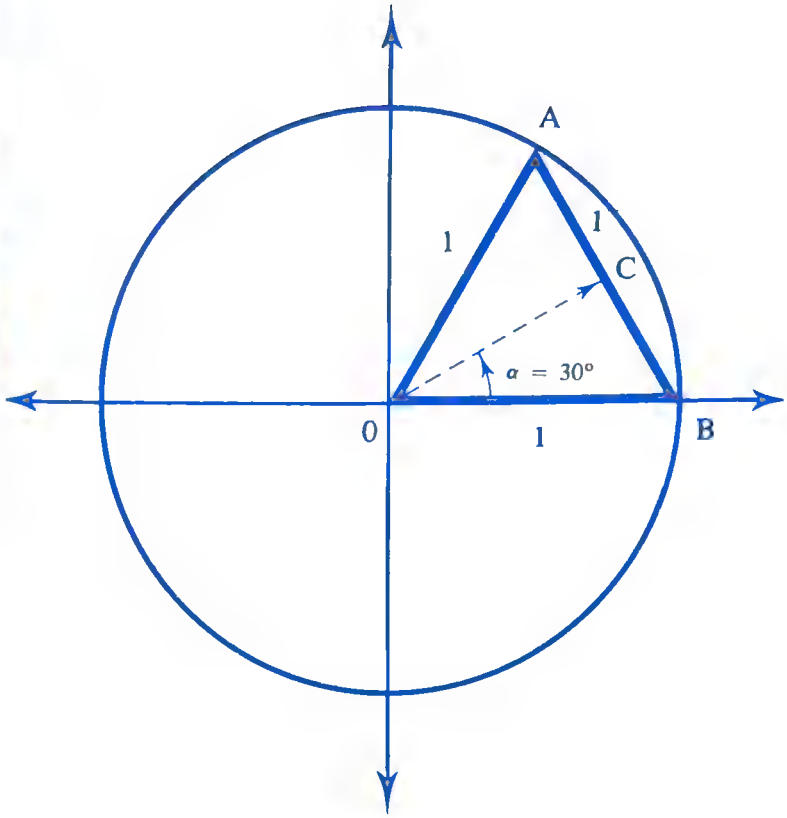
En el diario ABC de fecha 7 de noviembre de 1982, vino una nota en la que se decía que en el curso 83-84 serían temas obligados para el bachiller los siguientes:

- Estadística descriptiva e informática
- Conocimiento de Ordenadores
- Lenguaje de los organigramas y aplicaciones más normales de la informática
- Conjuntos numéricos
- Magnitudes

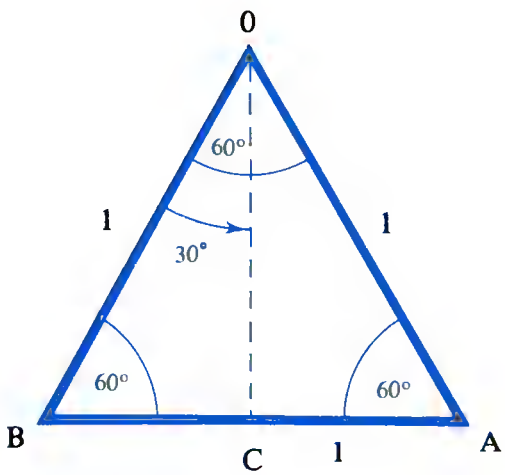
El profesorado de la rama de ciencias jamás estudió informática, como no fuera que estuvieran licenciados en matemáticas económicas, ingeniería, etc., o sea, carreras especiales o universitarias, y aún así sus conocimientos de esta materia son muy por encima, casi de memoria ya olvidada, y cuantos más años haga que terminaron la carrera menos se estudiaba éste tema. Hablo por experiencia.

Estos temas se han tenido que posponer (su estudio), al no tener estos profesores una fuente normal y fácilmente comprensiva para su propia información, así como también los autores de los libros de texto que, en una palabra, no tenían (teníamos) ni idea que era esto, les sonaba como a otro idioma.

5.b Para $\alpha = 30°$



Vamos a fijarnos dentro de la circunferencia goniométrica, en el triángulo equilátero BOA.

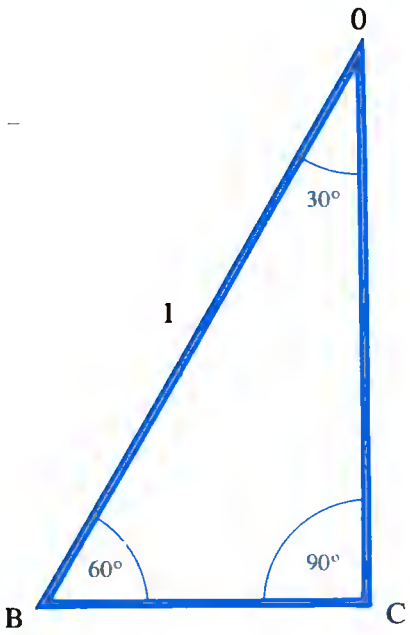


Conviene recordar, que en un trigángulo cualquiera la suma de los tres ángulos es 180°.

En nuestro caso, al ser un triángulo equilátero, si los tres lados son iguales, necesariamente son iguales los tres ángulos.

$$\hat{B} = \hat{O} = \hat{A} = 60°$$

Ahora trazamos la altura desde el vértice o, al lado opuesto, al que divide por la mitad, quedando trazado el triángulo rectángulo B C O, sobre el que vamos a realizar el estudio.



$\widehat{O} = 30°$
$\widehat{B} = 60°$
$\widehat{C} = 90°$
$\overline{OB} = 1$
$\overline{BC} = ½$
$\overline{OC}$ = Desconocido

Por el teorema de Pitágoras, podemos encontrar el valor del lado OC;

$$OB^2 = BC^2 + OC^2$$
$$OC^2 = OB^2 - BC^2$$
$$OC = \sqrt{OB^2 - BC^2}$$

Dando los valores numéricos, tenemos:

$$OC = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Una vez que sabemos el valor del lado OC, no tenemos ningún problema en encontrar las razones del ángulo $\alpha = 30°$, ya que se deducen de la figura

$$OC = BO \cdot \cos 30° \Rightarrow \cos 30° \frac{OC}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BC = BO \cdot \operatorname{sen} 30° \Rightarrow \operatorname{sen} 30° = \frac{BC}{BO} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} \Rightarrow \operatorname{tg} 30° = \frac{BC}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Desde la publicación de esta nota yo estuve tratando de documentarme, hasta que un compañero de estudios (hoy catedrático) me informó que los mejores libros de informática eran los libros "RUSOS" y me recomendó uno en concreto. Me lo compré, me lo leí, y al final estaba exactamente lo mismo que cuando empecé, pero... con más dolor de cabeza. No voy a mencionar ni su título, ni su autor. Lo daba todo como sabido, que en lengueje de los ordenadores el cero, es cero, el uno es uno, etc..., pero ¿por qué? No explicaba nade, había que aprenderse unos números de memoria, exactamente igual les ocurre a los estudientes de matemáticas, económicas y carreres especiales.

Sin embargo un buen día y debido a una feliz idea lo descubrí y totalmente de de la casualidad. Comencé a estudiarlo y a perfeccionarlo y practicarlo y todo ello cón unos resultados sensacionales. Ya comprendí los principios de la cibernética, ya ví su origen y su facilidad, hasta tal punto, que aquí en páginas sucesivas lo estudiaremos y de tal manera me comprometo a explicarlo, que les doy mi palabra formal que lo pueden comprender perfectamente hasta un niño que sepa *dividir por una sola cifra*.

La práctica del deporte desarrolle en el individuo las condiciones físices y fortalece en algunos las espirituales. Es quizá, por lo que se considera al deporte de carácter educetivo. Pare el deportista no debe existir afán de lucro y sí el efán de establecer y mejorar marcas.

Los primeros que practiceron el deporte fueron los griegos con las luchas, lanzamiento de disco y jabalina, carreras pedestres, etc., celebrando cada cuatro años los famosos juegos olímpicos, cuyos vencedores eran considerados casi como dioses. En el año 1863, el barón de Coubertin, renovó dichos juegos, restableciendo su celebración en Atenas.

En Roma el deporte lo practicaban, casi siempre las clases inferiores y en España quitando la ceza y los combates de espadas que practicaban los nobles, no existían, en le antigüedad, más que el juego de pelota y las luchas.

Resumiendo:

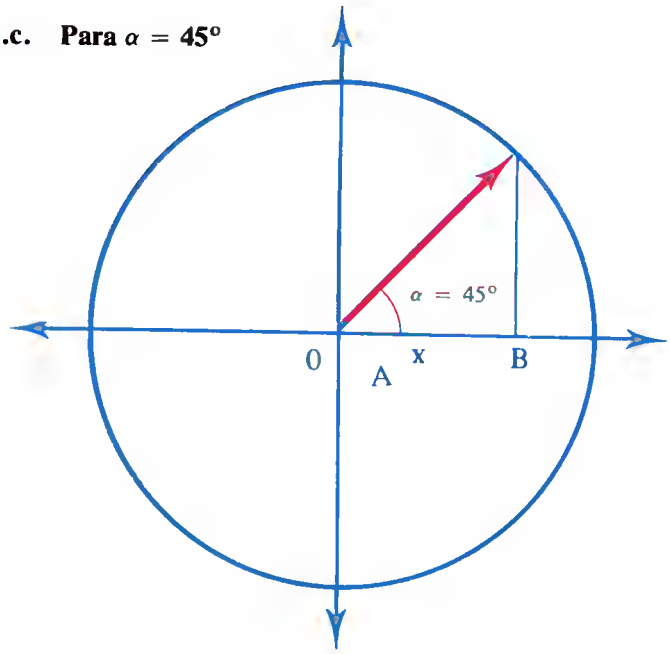
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{cosc } 30^\circ = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

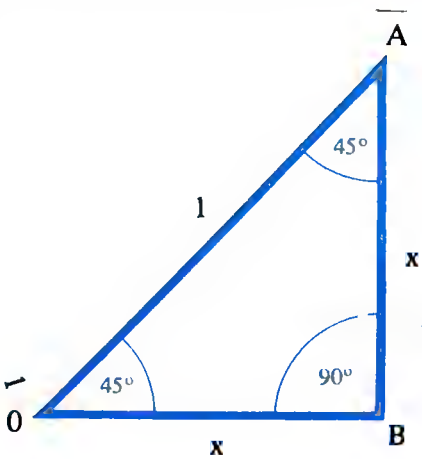
$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{cotg } 30^\circ = \sqrt{3}$$

NOTA.—Estas razones como es lógico suponer, se cumplen siempre, no sólo en el caso de un triángulo equilátero de lado la unidad, sino en el caso general de un triángulo equilátero de lado "L".

5.c. Para $\alpha = 45^\circ$



Dentro de la circunferencia goniométrica, vamos a fijarnos en el triángulo rectangular isósceles OBA



Si $\overline{OB} = \overline{BA}$,

esto implica que $\widehat{O} = \widehat{A} = 45^\circ$

Por otro lado OB y BA son valores desconocidos pero que podemos encontrar aplicando el teorema de Pitágoras

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + BA^2$$

Sustituimos por sus valores:

$$1^2 = X^2 + X^2;$$

$$1 = 2X^2;$$

Despejamos "X^2"

$$X^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow X = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

racionalizamos $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así pues,

$$\overline{OB} = \overline{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con todos estos datos pasamos a encontrar las razones de $\alpha = 45°$, que se deducen de la figura

$$OB = OA \cdot \cos 45° \Rightarrow \cos 45° = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = OA \cdot \operatorname{sen} 45° \Rightarrow \operatorname{sen} 45° = \frac{AB}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} \Rightarrow \operatorname{tg} 45° = \frac{AB}{OB} = 1$$

Resumiendo:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec 45° = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = 1 \Rightarrow \operatorname{cotg} 45° = 1$$

NOTA.—Al igual que en el caso anterior, las razones de 45° se cumplen también en el caso de un triángulo rectángulo de hipotenusa "L".

Hasta el siglo XIX no existe el deporte en Europa. Fueron cuatro hombres los que lo impulsaron: el alemán, padre de la gimnasia F.L. Jhan; el sueco, creador de la gimnasia sueca P.H. Ling; el británico T. Arnold y el español F. Amorós que fundó un gimnasio en París. En España se creó la Federación Española de Atletismo en 1918 y en 1920, se fundó en Barcelona la de Natación. En 1935 se instituyó la primera vuelta ciclista a España. Goyoaga conquistó en 1955 el título mundial de salto en hípice, el equipo de hockey sobre patines fue campeón mundial los años 1951-1954-1955. Joaquín Blume ganó el campeonato europeo de gimnasia en 1957, y Bahamontes ganaba la vuelta ciclista a Francia en 1959.

Ultimamente se nota un gran desarrollo del deporte que se va popularizando, destacando entre todos el fútbol que mueve millones de pesetas y de personas.

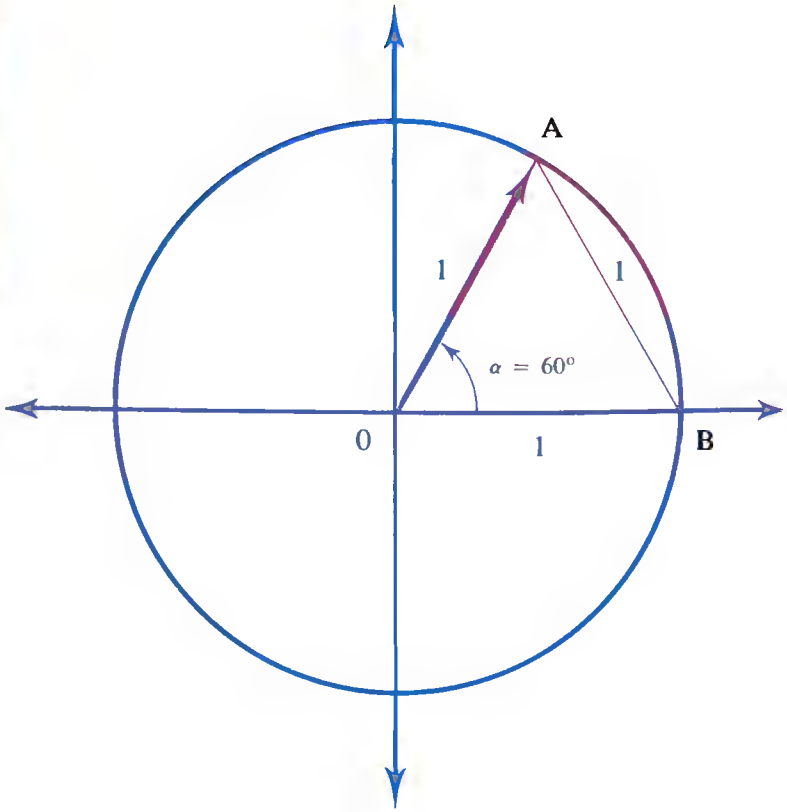
Para celebrar el centenario de la Revolución Francesa se convocó un concurso al que concurrieron setecientos proyectos siendo elegido el que presentó el ingeniero Gustavo Eiffel, se trataba de una torre de 320,75 m. de altura construida en hierro, con las superficies caladas para hacerla menos vulnerable a las sacudidas del viento.

Sus impresionantes cimientos —dieciseis bloques macizos de hormigón que descensan sobre una capa de arcilla del subsuelo— tardaron seis meses en construirse, entre tanto se iban fabricando los elementos metálicos que componen la torre propiamente dicha. Nada se había dejado al azar, los dibujos ocupaban cinco mil trescientas hojas de papel y así cada pieza al llegar a la obra ajustaba perfectamente en su sitio, se unieron las piezas con dos millones quinientos mil remaches. Para darle una capa de color se necesitaron veinte mil horas de trabajo y cuarenta y cinco toneladas de pintura.

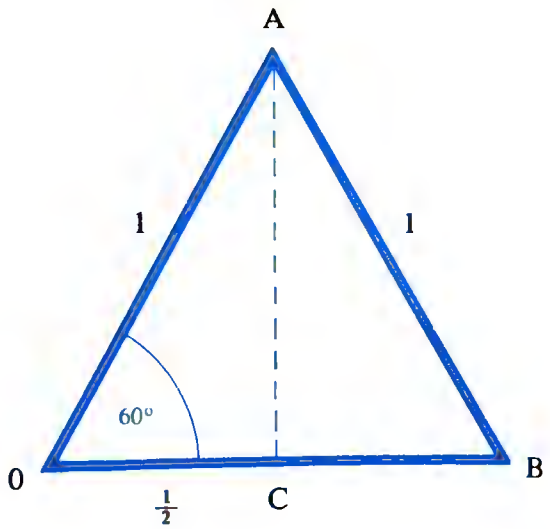
El día 31 de marzo de 1889 el Sr. Eiffel subió sus mil seiscientos escalones para hizar la bandera tricolor, fue abierta al público el 15 de mayo de ese mismo año.

Hasta ahora la han visitado más de cien millones de personas.

5.d. Para $\alpha = 60°$

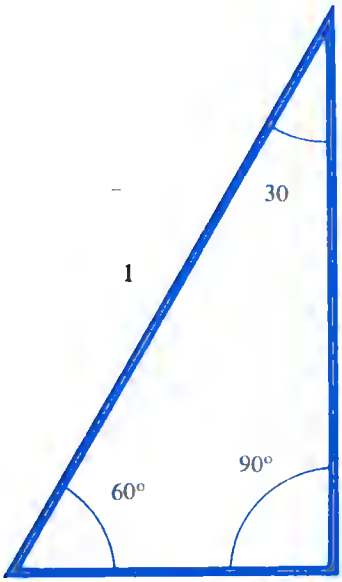


Dentro de la circunferencia goniométrica, nos fijamos en el triángulo equilátero OAB.



Trazamos la altura desde el vértice A al lado opuesto, al que divide por la mitad.

Ahora, igual que ocurría con el ángulo de 30°, el estudio lo hacíamos sobre el triángulo OAC.



$\widehat{O} = 60°$
$\widehat{A} = 30°$
$\widehat{C} = 90°$
$\overline{OA} = 1$
$\overline{OC} = \frac{1}{2}$
$\overline{AC}$ = Desconocido.

Por el teorema de Pitágoras, podemos saber el valor del lado $\overline{AC}$:

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

$$AC^2 = OA^2 - OC^2$$

$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2}$$

Sustituimos por sus valores numéricos

$$AC = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Al saber el valor de los tres lados del triángulo OAC, se deduce de la figura las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 60°$.

$$AC = OA \cdot \operatorname{sen} 60° \Rightarrow \operatorname{sen} 60° = \frac{AC}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = OA \cdot \cos 60° \Rightarrow \cos 60° = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\operatorname{sen} 60°}{\cos 60°} \Rightarrow \operatorname{tg} 60° = \frac{AC}{OC} = \sqrt{3}$$

PARADOJA DE RICHARDS

Consideremos el conjunto "E", formado por todos los números naturales que no se pueden definir con menos de treinta palabras.

Existe un teorema que se enuncia: Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene primer elemento.

Sea "a" el primer elemento de E, en consecuencia "a" = primer número natural que no se puede definir con menos de treinta palabras.

"Acabamos de definir al elemento "a" con menos de treinta palabras (13)".

La pregunta lógica es: ¿pertenece "a" al conjunto E? Por un lado, el conjunto E tiene que tener primer elemento (por el teorema) y por otro lado, todo elemento de E no puede tener menos de treinta palabras y "a" sólo tiene trece.

Julio Carrascosa Saez

Uno de los compositores de música que más hondo llegaron al corazón del pueblo de Madrid y de toda España, fue el maestro Federico Chueca, este compositor madrileño gozó de una extraordinaria popularidad por su fácil y alegre melodía.

Chueca en cierto modo abusó de su famosa facilidad para componer, no preocupándose de aprender bien la técnica musical y en consecuencia necesitaba que sus obras fueran pulides primeramente por Barbieri y Bretón y más tarde por Valverde.

Su lista de obras y zarzuelas a las que puso música es muy extensa, siendo las más famosas "La Gran Vía", "La Alegría de la Huerta" y "Agua, Azucarillos y Aguardiente" estas y otras muchas zarzuelas escritas en un género genuinamente español, dieron a Chueca eterna fema y aún hoy día se siguen escuchando con deleite.

Resumiendo:

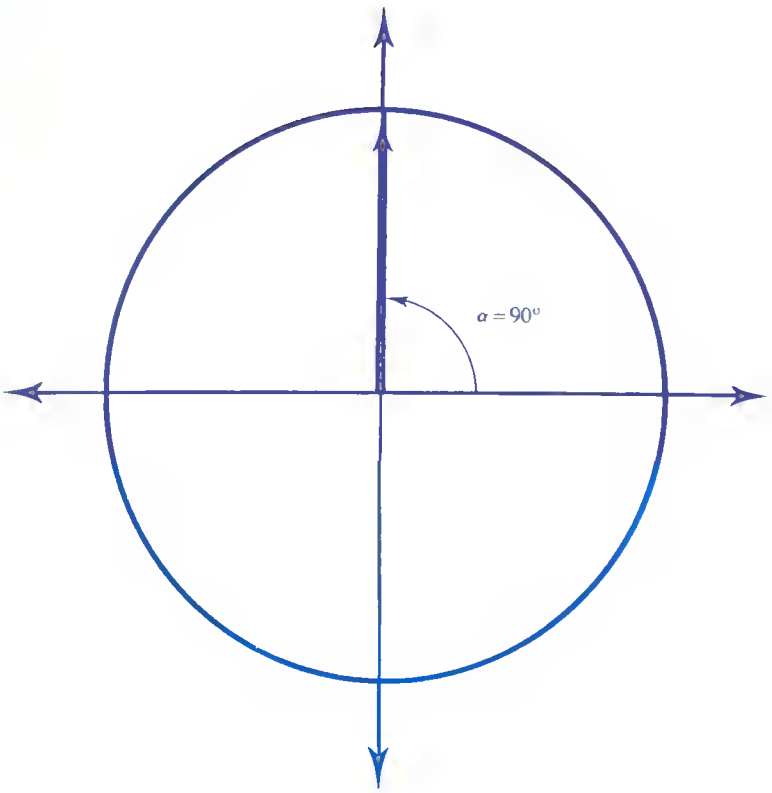
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{cosec } 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec 60° = 2$$

$$\text{tg } 60° = \sqrt{3} \Rightarrow \text{cotg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

NOTA.— Estas razones no sólo se cumplen en el caso de un triángulo equilátero de lado la unidad, si no en el caso general de un triángulo equilátero de lado "L".

5.e Para $\alpha = 90°$



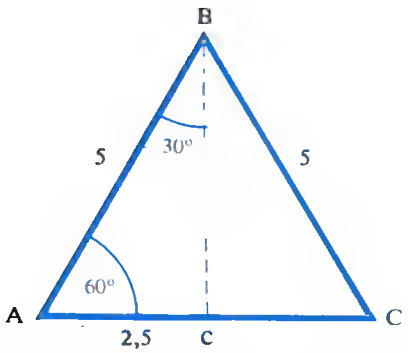
Si el ángulo α es 90°, el vector representante se encuentra situado en el primer cuadrante, sobre el eje de las y.

Por tanto, mirando a la figura se deduce,

$$\text{sen } 90° = 1 \Rightarrow \text{cosec } 90° = 1$$
$$\cos 90 = 0 \Rightarrow \sec 90° = \infty$$
$$\text{tg } 90° = \infty \Rightarrow \text{cotg } 90° = 0$$

Ejemplo:

Dado un triángulo equilátero de lado 5 cm, deducir, las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha = 30°$ y $\alpha = 60°$.



$\overline{AB} = 5$

$\overline{Ac} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$\overline{BC}$ = desconocido

$BC^2 + AC^2 = AB^2$; $BC^2 = AB^2 - AC^2$

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$BC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Una vez que sabemos los tres lados, por la figura se deducen las razones trigonométricas.

"Para 30°"

$$BC = AB \cdot \cos 30° \Rightarrow \cos 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{2} : 5 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = AB \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{2} : 5 = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} \Rightarrow \text{tg } 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{2} : \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{cosec } 30° = 2$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{cotg } 30° = \sqrt{3}$$

Como se ve son valores constantes, que no dependen de la medida de los lados triángulo.

"Para 60" se realiza de la misma forma.

En un colegio querían hacer un campeoneto de tenis y tener un campeón absoluto antes de que terminase el curso y de tal manera que cada día se jugara *un solo partido*.

Se presentaron a este campeonato 33 jugadores. Las eliminatorias serían por el sistema de "KAO", o sea; un partido un eliminado y el ganador pasabe a la siguiente ronda. Pero, los jugadores eran impares y por lo tanto uno tenía que descansar, por sorteo y pasar directamente a la siguiente eliminatoria. Los alumnos se habían hecho un lío con las eliminatorias, los días, etc... y ¿como resolverlo? Muy sencillo. Veamos·

16 jugadores,	16 eliminados. Quedan 16 + 1 que descansó. Descansa 1 (por sorteo) y pasan a la siguiente 16 jugadores (más el que descansó (17).
8 partidos,	8 eliminados. Quedan 8 + 1 que descansó. (Descansa 1 por sorteo) y pasan a la siguiente 8 jugadores más el que descansó.
4 partidos,	4 eliminados. Quedan 4 +1 (que descansó). Descansa 1 (sorteo) que pasan a la siguiente ronda.
2 partidos,	2 eliminados. Quedan 2 + 1 (que descansó). Descansa 1 (sorteo) que pasan a la siguiente ronda.
1 partido;	1 eliminado. (Quedan 1 + 1 que descansó) y pasan a la siguiente ronda.
1 partido,	1 eliminado y un CAMPEON

Bien, ¿esto que nos enseña? Si sumais los partidos que se han jugado, vareis que son tantos como jugadores tengamos, siendo el número de jugadores par; y si el número de jugadores es impar son tantos los partidos como el número de jugadores menos uno.

6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Se dice que dos ángulos α y β son complementarios cuando su suma es igual a 90°. Es decir:

$$\alpha + \beta = 90°$$

ó

$$\alpha = 90° - \beta$$

ó

$$\beta = 90° - \alpha$$

Expresado en radianes sería:

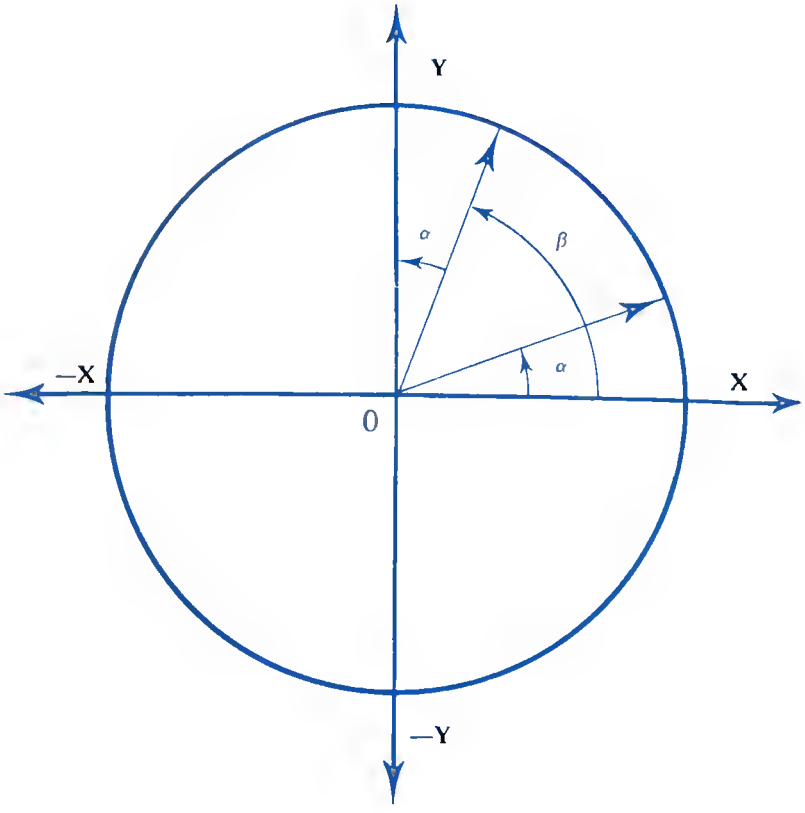
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

ó

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

ó

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



Para deducir las razones trigonométricas de los ángulos complementarios nos basta con observar atentamente la figura y señalar una serie de simetrías:

PROPIEDADES DEL NUMERO 9

Este número tiene multitud de propiedades, hasta tal punto que aquí y hace muchos eños se usaba la "prueba del 9" y también llamada "raíz digital del 9".

Existe una prueba muy espectacular divertida y entretenida con esto. Veamos, le decimos a un amigo que ponga el número del díe en que nació, seguido del ordinal correspondiente al mes (si es en enero, un 1; si es febrero, un 2 y así sucesivamente) y por último el año en que nació, luego que invierta el número y reste el menor del mayor y el número que nos da vamos sumando las cifras absolutas de estos números y nos dará (posiblemente) dos cifras (18 ó 1 + 8); (27 ó 2 + 7) estas cifras se suman iguelmente hasta quedarnos un solo dígito y este será siempre el "9".

Pero además, vamos a rizar el rizo o sea hecerlo todavía más espectacular, que ponga para restar los mismos números que existen en su fecha de necimiento pero en el "orden que quiera", restamos el menor del mayor... sumamos... (nos dará posiblemente dos cifras) estas dos cifras las sumamos y también dará "9".

NOTA: Decimos que *posiblemente* nos dará dos cifras, si da la suma una cifra tendrá que ser sin duda alguna la cifra "9"

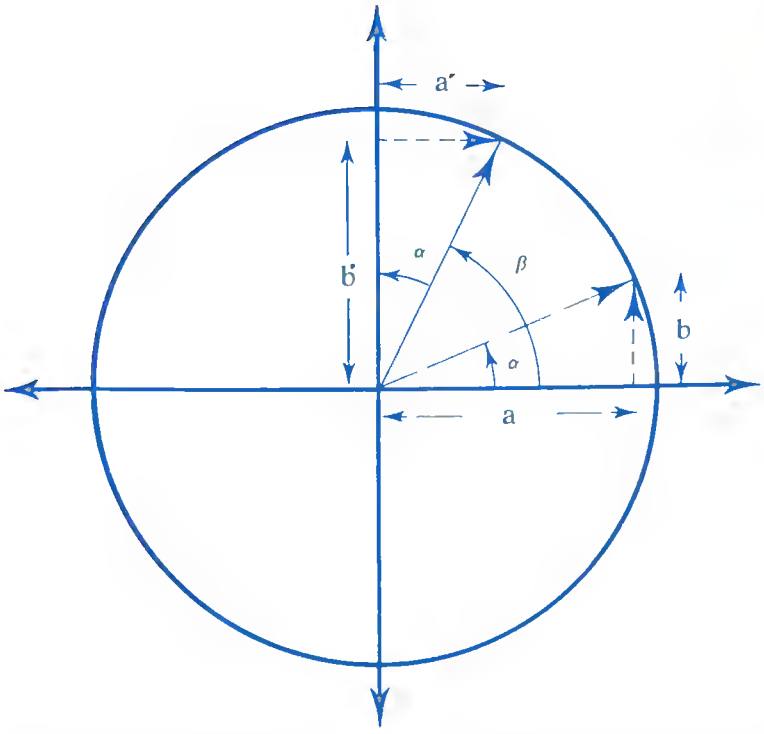
Veamos, una persona nació el 25 de marzo de 1942. 25-3-1942.

2531942 se resta la misma cifra al revés.
2491352
0040590

0+0+4+0+5+9+0=18;
1+8="9"

4915232 la misma fecha en cualquier orden
2531942
2383290

2+3+8+3+2+9+0=27;
2+7="9"



El seno del ángulo β será igual al seno de $(90—\alpha)$ que es precisamente el segmento b′, por simetría dicho segmento coincide con el segmento a que es precisamente el coseno de α, luego:

$$\text{sen } \beta = \text{sen } (90° - \alpha) = b' = a = \cos \alpha$$

En radianes

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

El coseno de β será igual al de $(90° - \alpha)$ y coincidiría con el segmento a′ que por simetría es igual a b que es, precisamente, el seno de α, luego:

$$\cos \beta = \cos (90° - \alpha) = a' = b = \text{sen } \alpha$$

En radianes

$$\cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen } \alpha$$

La tangente es igual al cociente entre el seno y el coseno, luego la tangente de β será igual al seno de β partido por el coseno de β, aplicando lo deducido anteriormente tendremos:

$$\text{tg } \beta = \text{tag } (90° - \alpha) = \frac{\text{sen } (90° - \alpha)}{\cos (90° - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{cotg } \alpha$$

El agua de la Tierra está siempre en movimiento.

Así en un río que a va a mucha velocidad si encuentra el agua una depresión del terreno, un valle cavado por el hielo, el crater de un volcan apagado, etc., disminuye la velocidad llena la depresión y forma un lago.

Hay lagos artificiales construídos por el hombre mediante diques o presas.

Existen también lagos con las aguas salobres o incluso saladas. A menudo son restos de antiguos brazos de mar, aislados por violentos terremotos que hicieron bajar el nivel del mar impidiendo toda comunicación con el lago aislado. Así el Mar Caspio es un lago salobre de grandes magnitudes. El Mar Muerto es un lago tan salado que el que se baña en él, una vez que se seca el agua se encuentra cubierto por una fina capa blanca de sal. Alrededor de este lago se ha montado una verdadera industria para la extracción de sal.

El lago puede considerarse como un verdadero ecosisteme, en él viven en equilibrio animeles y plantas. Las plantas alimentan a los animales y que éstos devuelven a las plantas el abono en forma de desechos elaborados por microorganismos.

En las culturas primitivas y más aún en las prehistóricas, no existen templos propiamente dichos.

Los lugares dedicados e rendir culto e una divinidad no tenían edificio especialmente construído a tal fin, sino que se realizaban en lugares considerados sagrados por algún motivo especial.

Vamos a ver las distintas civilizaciones primitivas y antiguas y su evolución en le construcción de templos.

HITITAS:

Como en casi todas las civilizaciones primitivas, los lugares de culto de los hititas se podían dividir en dos categorías: los tem - plos rupestres y los edificios de piedre.

La construcción seguía siempre regles fijas y consistía en que en el centro del templo había un patio rectangular y a su elrededor existían numerosas celdas de pequeñes dimensiones dedicadas a la oración y el sacrificio. Estas celdas, tenían ventanales que deban al exterior.

Por uno de los laterales de estos templos, existía un túnel o corredor que comunicaba con el santuario propiamente dicho. Este santuario estaba anexo al edificio del templo, o see independiente y nunca dentro de él, lo único que le unía con éste era el pasillo y al fondo de la sala del santuario y en el centro, se encontraba la divinidad colocade sobre un pedestal.

En radianes sería

$$\operatorname{tag}\beta = \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$$

Resumiendo lo anteriormente dicho podemos afirmar que si dos ángulos son complementarios, el seno de cualquiera de ellos será igual al coseno del otro, su coseno igual al seno del otro y la tangente igual a la cotangente del otro.

Ejemplo: Calcular las razones trigonométricas del ángulo complementario al de 30°, partiendo de la base de que únicamente conocemos las razones de 30° (estudiadas en preguntas anteriores).

SOLUCION

Por tratarse de complementarios podemos poner:

$$\beta = 90° - 30°$$

$$\operatorname{sen}\beta = (90 - 30°) = \cos 30°$$

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\cos\beta = \cos(90° - 30°) = \operatorname{sen} 30°$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tag}\beta = \operatorname{tag}(90° - 30°) = \operatorname{cotg} 30°$$

$$\operatorname{tag}\beta = \sqrt{3}$$

Como se ve, los resultados son correctos, únicamente tenemos que compararlos con las razones trigonométricas del ángulo de 60°, calculadas en una pregunta anterior, puesto que:

$$\beta = 90° - 30° \quad = 60°$$

7.— RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS SUPLEMENTARIOS

Se dice que dos ángulos α y β son suplementarios cuando su suma es igual a 180°. Es decir:

$$\alpha + \beta = 180°$$

ó

$$\alpha = 180° - \beta$$

ó

$$\beta = 180° - \alpha$$

Expresándolo en radianes tendremos:

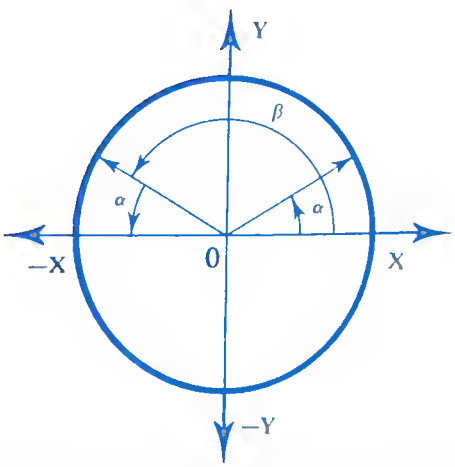
$$\alpha + \beta = \pi$$

ó

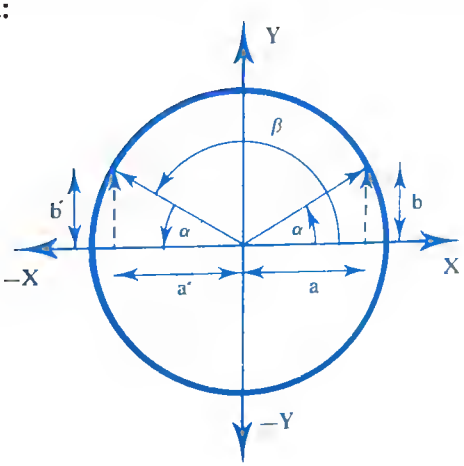
$$\alpha = \pi - \beta$$

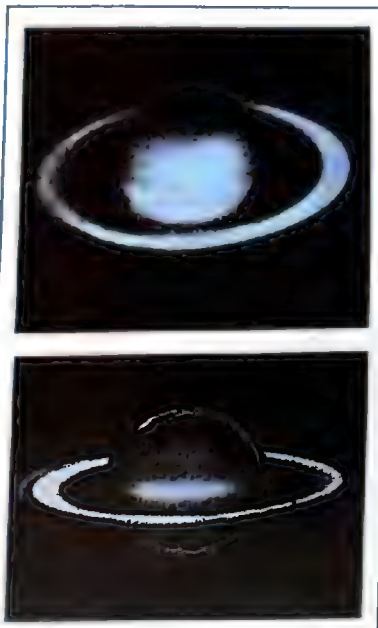
ó

$$\beta = \pi - \alpha$$



Las razones trigonométricas de estos ángulos se calcularán, al igual que en el caso anterior por la observación de las simetrías en la figura:





OBSERVAR LOS PLANETAS

El astrónomo aficionado, una vez que halla visto el sol y la luna, se dedicará, sin duda, a observar nuestros vecinos los planetas. Así, por ejemplo, verá Marte por su característico brillo de color rojo, Mercurio, planeta más cercano al sol y casi siempre oculto tras el brillo de éste que cuando mejor se ve, es a la salida o puesta del sol (orto y ocaso); Venus no muy fácil de localizar y, por supuesto, el aficionado sólo podrá ver cuando está más cerca de la Tierra; Júpiter, Urano, Neptuno y Plutón como planetas más alejados de nuestra Tierra no tiene detalle alguno digno de mencionar y además Plutón como el más alejado de la Tierra es imposible que lo vea el aficionado pues ademas de tener un telescopio de lo menos 35 cm. de abertura, le será difícil localizarlo. Saturno es el más fascinante de los planetas. Con sólo ver los anillos, no olvidará el espectáculo. El color de este planeta, es amarillento.

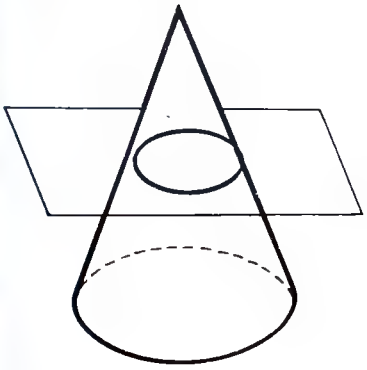
Al efectuar los estudios de las cónicas (circunferencia elipse, hipérbola y parábola) posiblemente no hemos encontrado cómo se forman, de dónde provienen, etc.

Vamos a realizar un ligero paro práctico estudio para ver, como se forman teniendo como base que *son solamente líneas* y no superficies. En todos los ejemplos vamos a tomar como referencia un *cono recto*.

CIRCUNFERENCIA

Es la *Línea* que nos resulta al cortar un *cono recto* por un plano paralelo a le base.

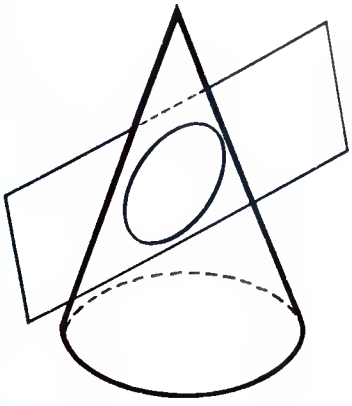
NOTA: Al poder trazar infinitos planos *paralelos* a la base, nos pueden resultar infinitas circunferencias, tanto más grandes cuanto más cercano a la base esté el plano de corte.



ELIPSE

Es la *línea* que nos resulta al cortar un *cono recto* por un plano *oblicuo*.

NOTA: Al poder trazar infinitos planos *oblicuos* a la base nos saldrán infinitas elipses tanto más pronunciadas cuanto más oblicuo sea el plano.



El seno de β será igual al seno de $(180° - \alpha)$ que coincide con el segmento b' que es igual al segmento b que representa el seno del ángulo α, luego:

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(180° - \alpha) = b' = b = \text{sen}\,\alpha$$

En radianes:

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

El coseno de β será igual al coseno de $(180° - \alpha)$ que es el segmento a' cuya longitud coincide con la de a, que es a su vez coseno de α, luego:

$$\cos\beta = \cos\,(180° - \alpha) = a' = a = -\cos\alpha$$

Expresado en radianes:

$$\cos\beta = \cos\,(\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

La tangente del ángulo β es igual a la tangente de $(180° - \alpha)$, por otro lado, como la tangente es el cociente entre el seno y el coseno, aplicando lo anteriormente deducido tendremos:

$$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(180° - \alpha) = \frac{\text{sen}\,(180° - \alpha)}{\cos\,(180° - \alpha)} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}$$

$$\text{tag}\,\beta = -\text{tag}\,\alpha$$

En radianes:

$$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(\pi - \alpha) = \text{tag}\,\alpha$$

Resumiendo lo expuesto podemos decir que si dos ángulos son suplementarios, el seno de uno se iguala al coseno del otro, el coseno de uno al coseno del otro y la tangente de uno igual a la tangente del otro.

Ej.: Dadas las razones trigonométricas de 30° calcular las razones de su ángulo suplementario β

$$\beta = 180° - 30° = 150$$

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(180° - 30°) = \text{sen}\,30°$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}$$

$\cos \beta = \cos (180° - 30°) = \cos 30°$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\text{tag } \beta = \text{tag } (180° - 30°) = \text{tg } 30°$

$$\text{tag } \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

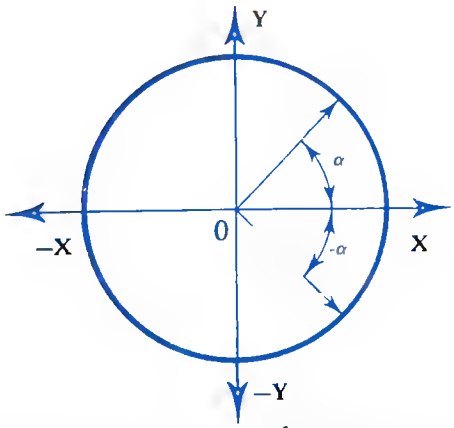
8.—RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS OPUESTOS

Se denominan ángulos opuestos a aquellos que teniendo el mismo valor absoluto tienen signos contrarios. El opuesto al ángulo (α) es el ángulo ($-\alpha$).

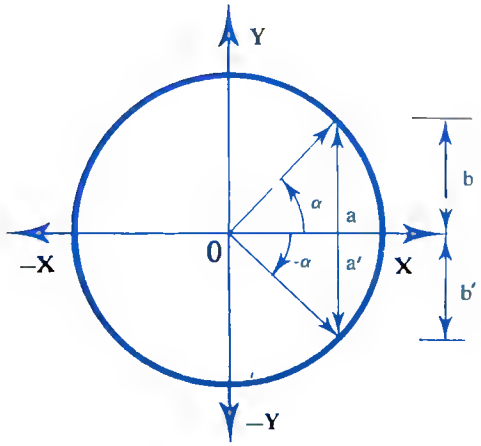
Ej.: El opuesto al ángulo de 30° es el ángulo de —30°.

El opuesto al ángulo de 57° es el ángulo de —57°.

Gráficamente podríamos representarlos de la siguiente manera:



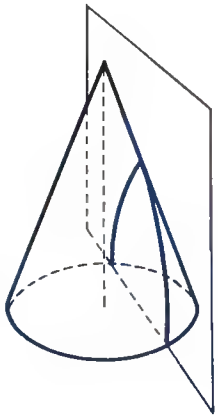
Para calcular sus razones emplearemos un razonamiento análogo a los anteriores, estableciendo las simetrías existentes:



HIPERBOLA

Es la *línea* que nos resulta al cortar un cono recto por un plano perpendicular a la base del cono.

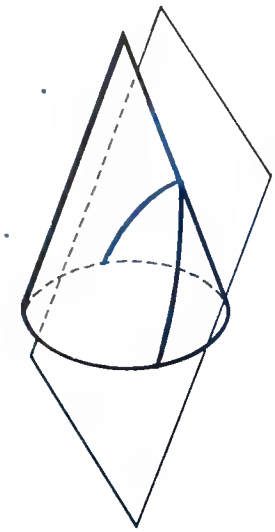
NOTA: Nos resultarán infinitas hipérbolas, tanto mayores cuanto más acercado esté el plano de corte al eje del cono.



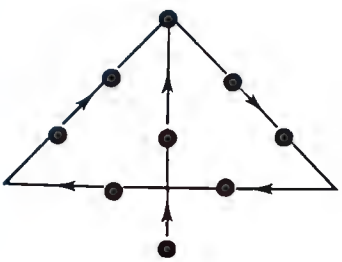
PARABOLA

La *línea* que nos resulta al cortar un cono recto por un plano paralelo a una de las generatrices.

NOTA: Nos resultarán infinitas parábolas, tanto mayores cuanto más cercano esté el plano de corte a la generatriz.



Solución el problema de los nueve puntos de la página 810.



El seno de $(-\alpha)$ será el segmento b' que en valor absoluto es igual al segmento b pero de signo contrario por encontrarse uno en el tramo positivo y otro en el negativo del eje de las Y; luego:

$$\text{Sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$$

El coseno de $(-\alpha)$ corresponde al segmento a y coincide con el coseno del ángulo (α), luego:

$$\text{Cos}\,(-\alpha)' = \cos\alpha$$

Aplicando la definición podemos encontrar el valor de la tangente:

$$\text{tag}\,(-\alpha) = \frac{\text{sen}\,(-\alpha)}{\cos\,(-\alpha)} = \frac{-\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} = -\,\text{tg}\,\alpha$$

$$\text{tag}\,(-\alpha) = -\,\text{tag}\,\alpha$$

Resumiendo lo anteriormente dicho, podemos afirmar que cuando los ángulos son opuestos sus cosenos se igualan y las demás razones son opuestas.

Ej.: Conocidas las razones de 45° calcular las de su ángulo opuesto (— 45°)

$\text{Sen}\,(-45°) = -\,\text{sen}\,45°$

$$\text{Sen}\,(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\text{Cos}\,(-45°) = \cos 45°$

$$\text{Cos}\,(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\text{tag}\,(-45°) = -\,\text{tag}\,45°$

$$\text{tag}\,(-45°) = -1$$

9.— RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 90° Y 180°

A.— Razones de los ángulos que difieren en 90°

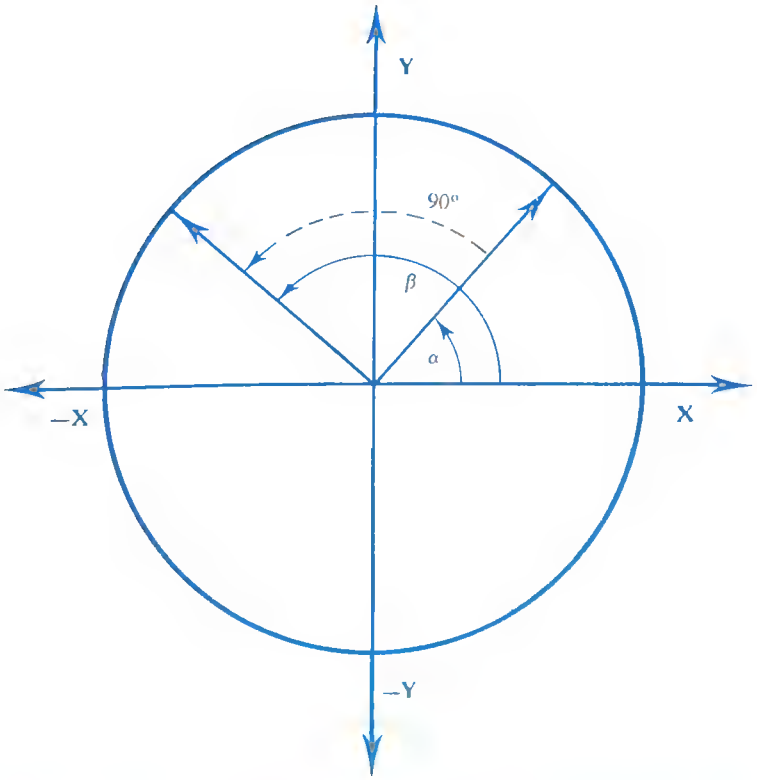
Si dos ángulos difieren en 90° tiene que cumplirse que

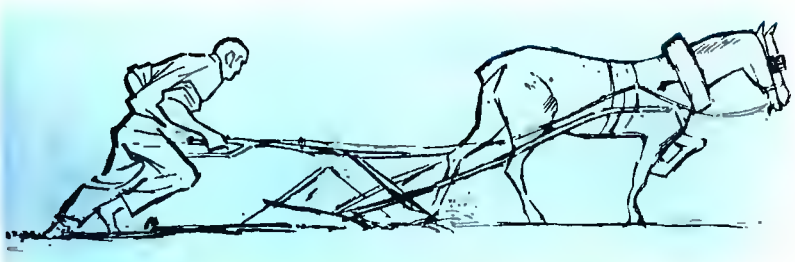
$$\beta = \alpha + 90^\circ$$

Expresándolo en radianes tendremos

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Gráficamente los dos ángulos tendrían la forma:





Hoy que tanto adelanta la tecnología casi no podemos hacernos idea de lo que representó una innovación técnica medieval que se ha comparado quizá con exageración, a la revolución que constituye la aparición de la máquina de vapor. Estas fueron las modificaciones que se introdujeron en el arnés del caballo, que permitieron su utilización en tareas agrícolas aumentando su rendimiento y la producción.

El antiguo sistema de correas oprimía el cuello de estos animales, no permitiéndole desarrollar su fuerza de tiro, en el siglo X aparece la collera que al actuar sobre la espalda del animal le permite ejercer un gran esfuerzo de tracción, unido a esto van las herraduras metálicas que sustituyen las antiguas sandalias y que le permiten andar por terrenos duros y resbaladizos asegurando en todo momento el contacto con el suelo.

Así mismo los estribos, el freno de boca y las espuelas son otras tantas invenciones europeas, que unidas a la creación de la actual silla de montar permitieron el total aprovechamiento de la energía proporcionada por este noble animal pasando en aquellas fechas a triplicar o cuadruplicar las escasas energías disponibles.

SISTEMA SENARIO

Hemos visto anteriormente distintos sistemas de numeración que se usaban (algunos se usan todavía) como son el duodecimal, (docena) el sexagesimal (60), etc.

Vemos a ver ahora el sistema senario (6) y su relación con el sistema decimal.

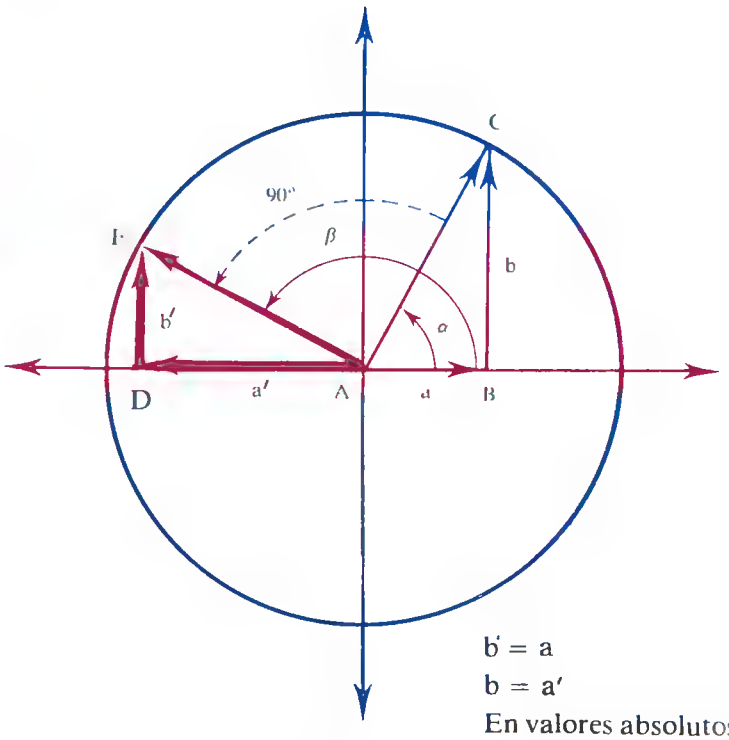
Para convertir un número decimal al sistema senario, hay que ir realizando divisiones sucesivas (de ese número, por seis como divisor) hasta que el último cociente sea inferior a *seis* y el número senario correspondiente a ese decimal será el *último cociente seguido de todos los demás restos.* Veamos esto en la práctica. Vamos a convertir el número 365 (decimal o en base a diez) al siatema senario:

$$\begin{array}{r|l} 365 & 6 \\ 05 & 60 \quad 6 \\ (5) & (0) \quad 10 \quad 6 \\ & \quad\ (4) \quad (1) \end{array}$$

y tendremos: que el número 365 en base diez es igual al número 1.405 en base seis, o sea:

$365_{(10)} = 1405_{(6)}$

Para ver cuales son sus razones trigonométricas establecemos las semejanzas. Los triángulos ABC y ADE son iguales ya que son rectángulos y tienen sus lados perpendiculares.



b′ = a

b = a′

En valores absolutos.

El seno del ángulo β es el segmento b′, que es igual, en valor absoluto, al segmento a, que es, precisamente, el coseno de α, luego:

$$\text{Sen}\,\beta = \text{sen}\,(\alpha + 90) = b' = a = (\cos\alpha)$$

En radianes:

$$\text{sen}\,\beta \quad (\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$$

El coseno de β es el segmento a′ que coincide con el segmento b que es precisamente el seno de α, pero mientras que a′ se mide sobre la parte negativa del eje de las X, el segmento b se mide en la parte posibiva del eje de las Y, luego tienen el mismo valor absoluto pero de signo contrario, luego:

$$\cos\beta = \cos\,(\alpha + 90) = a' = -b = -\text{sen}\,\alpha$$

Expresado en radianes:

$$\text{Cos}\,\beta = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\,\text{sen}\,\alpha$$

En cuanto a la tangente, es suficiente con aplicar la definición y lo deducido anteriormente;

$$\text{tag } \beta = \frac{\text{sen } (\alpha + 90°)}{\cos (\alpha + 90°)} = \frac{\cos \alpha}{-\text{ sen } \alpha} = -\text{ cotg } \alpha$$

En radianes tendríamos:

$$\text{tag } \beta = \frac{\text{sen } \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = -\text{ cotg } \alpha$$

Resumiendo lo anteriormente dicho, podemos afirmar que el seno de un ángulo β es igual al coseno del ángulo con el que difiere 90°, α; el coseno es igual al seno del otro cambiado de signo y la tangente es igual a la cotangente pero de signo contrario.

Ej.: Conocidas las razones de 45°, calcular las razones del ángulo que difiere con él 90°

$$\beta = 45° + 90° = 135°$$

$$\text{Sen } \beta = \text{sen } 135° = \cos 45°$$

$$\text{Sen } \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } \beta = \cos 135° = -\text{ sen } 45°$$

$$\text{Cos } \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tag } \beta = \frac{\text{sen } 135°}{\cos 135°} = \frac{\cos 45°}{-\text{sen } 45°} = -\text{ cotg } 45°$$

$$\text{tag } \beta = -1$$

B.— Razones de [illegible] ifieren en 180

Si dos ángulos α y β difieren en 180°, tienen que cumplir que:

$$\beta = \alpha + 180$$

Expresado en radianes

$$\beta = \alpha + \pi$$

Hagamos la prueba:

Multiplicamos el último cociente (1) por el divisor (6) y le añadimos el resto. Con este resultado vamos haciendo lo mismo hasta el final, o sea:

$1 \times 6 + 4 = 10$; $10 \times 6 + 0 = 60$;

$60 \times 6 + 5 = 365$

Bien, de igual manere un número senario lo podemos convertir en decimal. Tomemos un número cualquiera, y por supuesto que ni el último cociente ni las restas pueden ser el número seis o superiores:

Sea el número: $5423_{(6)}$

$5 \times 6 + 4 = 34$

$34 \times 6 + 2 = 206$

$206 \times 6 + 3 = 1239$

y tendremos que el número

$$5423_{(6)} = 1239_{(10)}$$

Hegamos la prueba dividiendo

$$\begin{array}{r|l} 1239 & 6 \\ 039 & 206 \\ (3) & 26 \\ & (2) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & \\ 34 & 6 \\ (4) & (5) \end{array}$$

4° 3° 2° 1°

$$1239_{(10)} = 5423_{(6)}$$

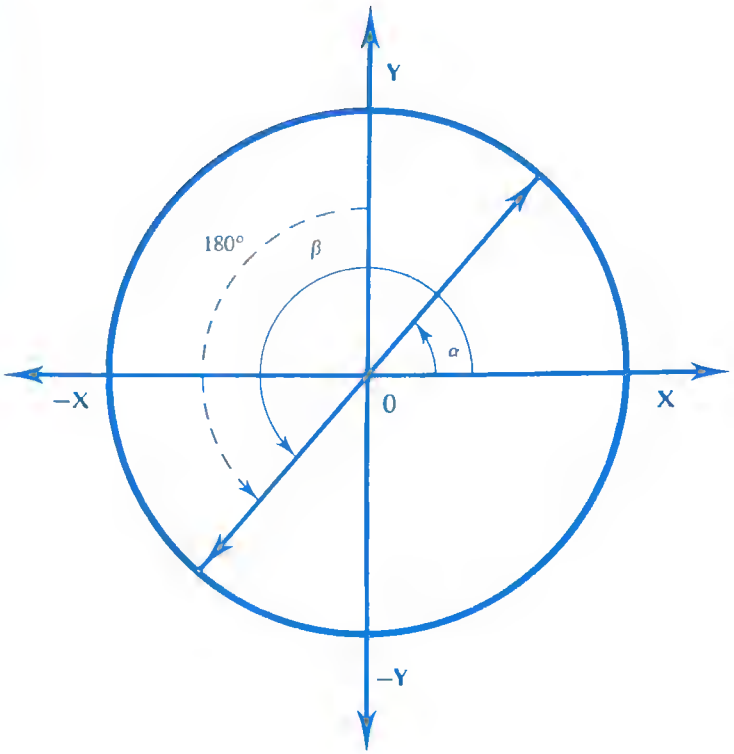
En la casa fue en lo que se inspiró el pueblo de Mesopotamia para construir los primeros templos.

Después evolucionó hasta tomar su propio carácter. El adobe cocido al sol era su primer material. Muros macizos, ciegos, con pequeñas ventanas y construídos sobre une base o cimiento de piedra que le daba gren solidez. A sus paredes tanto interiores como axteriores se las cubría con ladrillos esmeltados unas veces y con pinture otras. Los primeros templos fueron circulares, para luego adoptar formas cuadredas y finalmente ractangulares. A las celdas destinadas al culto se añadían patios, pasillos, habitaciones para los sacerdotes... etc. Todo esto, estaba rodeado de una muralla que era cada vez más alta, llegando e convertirse an una aspecie de montaña inaccesibla. Más adelante estas murallas se hicieron escalonadas, que llegó a ser el edificio más característico de la arquitactura religiosa mesopotámica.

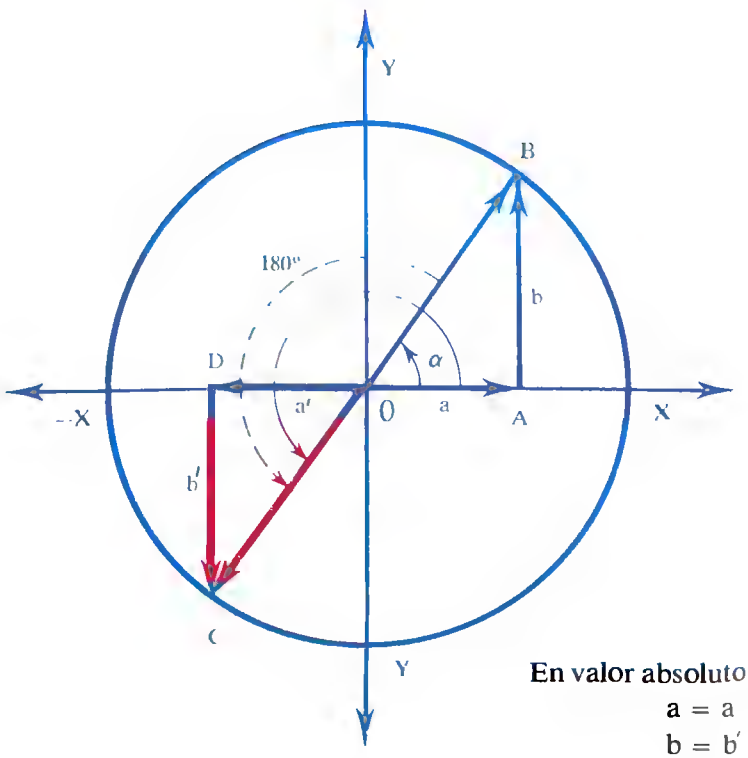
Durante la dinastía de Ur, el santuario de forma rectangular, tenía en su interior dos estancias, un "maos", un "pronaos" y un "opistodomo" así como una torre cuadrada a la que se ascendía por dos escalinatas monumentales.

Esta tradición arquitectónica, se mantuvo hasta el fin de la civilización mesopotámica, heredándolas las babilónicas, asirias y persas.

Gráficamente, estos dos ángulos tendrán la forma:



Para deducir sus razones trigonométricas, analizamos las simétricas existentes. Los triángulos OAB y OCD son iguales y los segmentos que los forman serán iguales en valor absoluto



En valor absoluto:

$a = a$

$b = b'$

El seno del ángulo β será el segmento b′, que en valor absoluto es igual al segmento b, pero de signo contrario puesto que b′ se mide sobre la parte negativa del eje de las Y y b se mide sobre la parte positiva, por otro lado el segmento b es el seno del ángulo α, luego tendremos:

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(\alpha + 180°) = b' = -b = -\text{sen}\,\alpha$$

Expresado en radianes:

$$\text{Sen}\,\beta = \text{sen}\,(\alpha + \pi) = -\text{sen}\,\alpha$$

El coseno del ángulo β es igual al segmento a′ que coincide en valor absoluto con el segmento a pero de signo contrario pues se miden en partes opuestas del eje de las X, como a es el coseno del ángulo α; tendremos:

$$\cos\beta = \cos(\alpha + 180°) = a' = -a = -\cos\alpha$$

En radianes:

$$\text{Cos}\,\beta = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$

La tangente del ángulo β se calcula mediante el cociente entre el seno y el coseno del ángulo, aplicando lo deducido anteriormente tendremos:

$$\text{tag}\,\beta = \frac{\text{sen}\,(\alpha + 180°)}{\cos(\alpha + 180°)} = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = \text{tag}\,\alpha$$

En radianes:

$$\text{tag}\,\beta = \frac{\text{sen}\,(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \text{tag}\,\alpha$$

Resumiendo podemos decir que si dos ángulos difieren en 180°, sus senos y cosenos son iguales en valor absoluto pero de signo contrario y las tangentes son iguales y del mismo signo.

Ej.: Conocidas las razones del ángulo de 60° calcular las razones del ángulo β que difiere con el primero en 180°.

$$\beta = 60 + 180 = 240$$

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,240° = -\text{sen}\,60°$$

$$\text{Sen}\,\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para utilizar la energía la forma mejor es la electricidad. Su transporte por cables de alta tensión es importantísimo y en cuanto a motores es muy superior el eléctrico a la máquina de vapor. Asimismo es la única manera de poder usar la energía nuclear.

En menos de un siglo la electricidad ha aumentado su producción mundial de forma vertiginosa, sobre todo en los países industriales donde cada diez años se hace doble su consumo, destacando entre estos países EE.UU. seguido de Rusia y Gran Bretaña.

Las centrales hidroeléctricas utilizan la fuerza del agua para su producción pero no todos los países tienen los medios naturales necesarios como son los ríos caudalosos, las caídas da agua con mayor o menor altura. Esta forma de producción eléctrica aunque tenga poco costo para funcionar, tiene el inconveniente de las sequías, o las heladas que hacen el funcionamiento más problemático que la de origen térmico.

Los orígenes de la música occidental modarna provienen de los trovadores y troveros que polulaban en los siglos XI al XIV por los castillos feudales y palacios. Una obra maestra de aste género son las Cantidas de Alfonso X el Sabio. En la antigüedad se creía que los compositores de melodías y aún los buenos intérpretes estaban inspirados por los dioses.

De todo el canto antiguo lo que ha llegado a nosotros con más fidelidad es el canto litúrgico. Se han podido resteurar an su estilo primitivo el canto romano y el ambrosiano da Milán. El estilo mozárabe español solamente ha podido ser descifrado en una docena de piezas.

En el Códice Calixtino de Compostela dedicado al apóstol Santiago, figura la primera pieza conocida para interpretar a tres voces contando entre ellas el tenor. Este género se cultivó en las grandes basílicas sobre todo en Nuestra Señora de París de donde se extendió a toda Europa.

$$\cos \beta = \cos 240° = -\cos 60°$$

$$\text{Cos } \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tag } \beta = \frac{\text{sen } 240°}{\cos 240°} = \text{tag } 60°$$

$$\text{tag } \beta = \sqrt{3}$$

10.– REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE

Si nos fijamos en las tablas trigonométricas veremos que sólo nos dan valores aquellos ángulos comprendidos entre 0° — 90°, es decir, pertenecientes al primer cuadrante.

No obstante se pueden obtener las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera α , por comparación con un ángulo perteneciente al 1er cuadrante, sin más que tener presente una serie de datos:

a) Si α es mayor que 360°, se divide este ángulo entre 360° siendo el resto resultante de esta división el ángulo que verdaderamente nos interese en nuestros cálculos, ya que un número entero de vueltas son iguales en valor y signo.

b) Si el resto es un ángulo que tiene su lado terminal en el primer cuadrante, no hay ningún problema.

c) Si el lado terminal se encuentra en el segundo cuadrante, se tendrá que reducir al primero, teniendo en cuenta la relación de los ángulos suplementarios.

d) Si el lado terminal se encuentra en el tercer cuadrante, se le restarán 180°.

e) Si el lado terminal se encuentra en el cuarto cuadrante, se le restarán 360°.

Veamos varios ejemplos:

Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 765°$

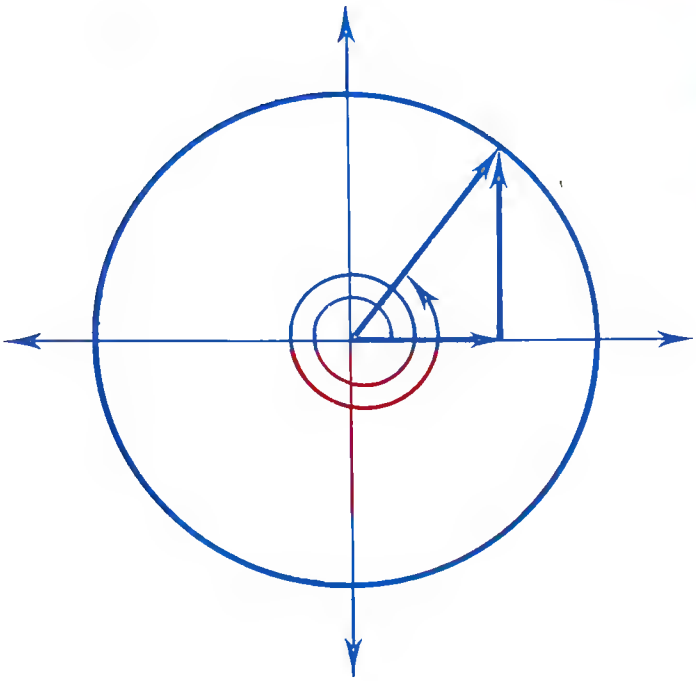
Solución

$765 > 360° \Rightarrow$ que el ángulo ha dado más de una vuelta a la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{rl} 1 \text{ vuelta} & \text{——————} \ 360^\circ \\ X & \text{——————} \ 765^\circ \end{array}\right\} X = \frac{765}{360} = 2 \text{ vueltas completas}$$

y queda un resto de 45°

$$765^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 45^\circ$$



Así pues, nuestro ángulo $\varphi = 765^\circ$, tiene las mismas razones trigonométricas que un ángulo de 45°, ya que su lado terminal queda en la misma posición que el de 45°.

$$\text{sen } 765^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 576^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 765^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1$$

$$\text{cosec } 765^\circ = \text{cosc } 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\text{sec } 765^\circ = \text{sec } 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\text{cotg } 765^\circ = \text{cotg } 45^\circ = 1$$

En la edad media los sellos se introdujeron en Europa por Roma y se crearon para cerrar y dar autenticidad a los documentos. La forma de los sellos era principalmente redonda y podían ser de cera, plomo o de plata u oro en casos excepcionales.

Podía ester pegado al documento, era de cera y se le llamaba adherente. Este sello fua ampleado por los romanos y visigodos y entró en España en el siglo XIII. El de mayor tamaño era privativo de los cancilleres y el menor era real. El sello real se usaba para dar autoridad a los documentos del rey y en la edad media lo guardaba un notario real. Cuando la creación de la cancillería fueron los cancilleres mayores los que lo guardaron y quienes ponían los sellos eran unos oficiales que se les decía selladores.

También existían sellos pendientes que se hacían de cera y plomo. Empezaron e usarlos los pontífices y su mayor importancia la adquirieron en los reinados da Alfonso X y Fernando IV, decayendo hasta desaparecer en tiempos de los Reyes Católicos.

El tener que llevar sellos los documentos produjo un gran ingreso para el tasoro real y an nuestro tiempo, además, son una fuente de ingresos, debido a su revalorización.

Existen y han existido, muchos matemáticos que han descubierto el *número perfecto* (para ellos, claro está) o al más perfecto, basándose en distintas ideas. Por ejemplo, el número siata, ya que el universo gira desde su creación sobre las bases de este número. El número diez, base de nuestro sistema de numeración (o decimal). El número doce muy usado en el siglo pasado, base del sistema duodacimal.

Los matemáticos actuales, han estado buscando el número perfecto, menor y que sea multiplo del máximo de números (qua tenga más divisibles). Unos lo basan en el seis, otros an al trainta, otros en el cien... y así sucesivamente.

Nosotros, simples amigos de las matemáticas, también tenemos nuestro número particular qua sea divisibla por un máximo de números. Veamos.

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3.628.800$

Es múltiplo de todos estos números por supuesto y a la vez de todos sus productos, o sea:

de 12—14—16—18—20; 15—21—24—27—30; 28—32—36—40—35—45—50—42—48—54—60—56—63—70—72—80—90; etc.

Para saber cuál es el número de divisores de otros números (var página 137) no hay más que descomponer el número y nos dará:

$3.628.800 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

y el número de divisores será el producto da cada una de las potencias *más uno*. O sea:

$(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) - 270$ divisores.

Ejemplo:

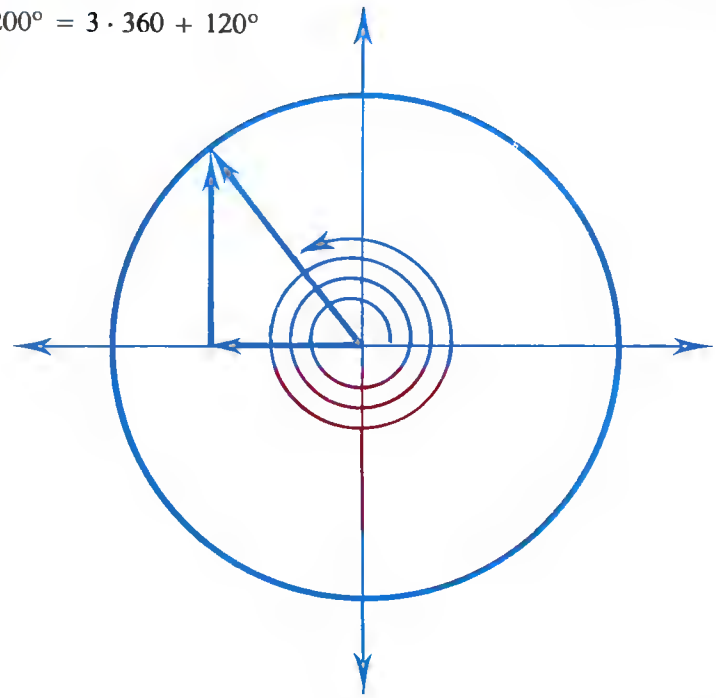
Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 1200$

Solución

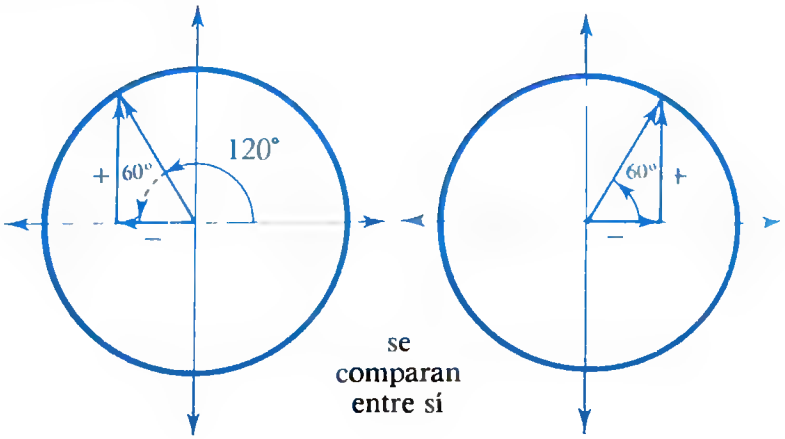
$1200 > 360°$ $\Rightarrow$ que el ángulo ha dado más de una vuelta a la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \text{ vuelta} & \text{———} \quad 360° \\ X & \text{———} \quad 1200 \end{array}\right\} X = \frac{1200}{360°} = 3 \text{ vueltas completas y de resto } 120°$$

$1200° = 3 \cdot 360 + 120°$



Por tanto nuestro ángulo $\varphi = 1200$, tendrá las mismas razones trigonométricas que un ángulo de 120°, ya que su lado terminal queda en la misma posición que el de 120°. Por otro lado el lado terminal de 120° queda en el 2° cuadrante, siendo su suplementario el ángulo de 60°, así pues el problema se resolverá de la siguiente forma:



se comparan entre sí

Como se ve en la figura la proyección del ángulo de 120° sobre el eje de las X, equivale a la del ángulo suplementario de 60°, teniendo presente que se encuentra en el segundo cuadrante y que por tanto el "seno" será "positivo" y el "coseno" negativo.

Así pues:

$$\text{sen } 1200^\circ = \text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

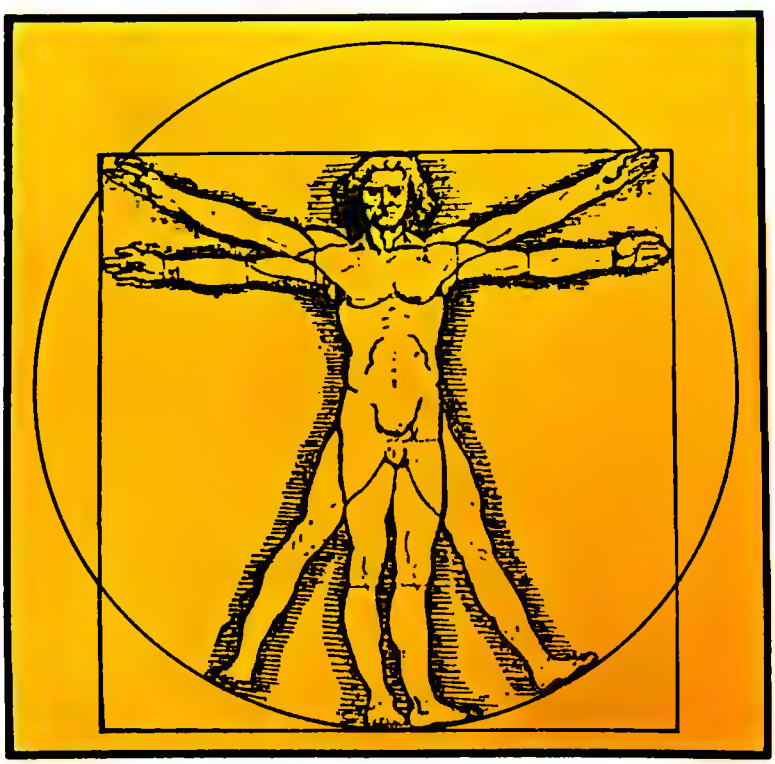
$$\cos 1200^\circ = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 1200^\circ = \text{tg } 120^\circ = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{cosec } 1200^\circ = \text{cosec } 120^\circ = \text{cosec } 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 1200^\circ = \sec 120^\circ = -\sec 60^\circ = -2$$

$$\text{cotg } 1200^\circ = \text{cotg } 120^\circ = -\text{cotg } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Vitrubio, el famoso arquitecto, dice en sus escritos sobre arquitectura que las medidas del cuerpo humano están relacionadas con la naturaleza de la manera siguiente: Cuetro dedos hacen un palmo; cuatro palmos hacen un pie; seis palmos hacen un codo; cuatro codos hacen la altura de un hombra; cuatro codos hacen un paso, y veinticuatro palmos hacen un hombre. Estas medidas las usó el an los edificios.

Si abrimos las piernas hasta disminuir la altura da un cuarto, y extendemos los brazos, levantándolos de tal modo que los dedos medios estén al nivel de la parte superior de la cabeza, debemos saber que el ombligo será el centro de un círculo del que los miembros extendidos tocan su circunferencia. Asimismo, el espacio entre las piernas formará un triángulo equilátero.

El espacio existente entre los brazos extendidos de un hombre es igual e su altura.

La distancia que hay desde las raíces del cabello hasta el fondo de la barbilla es la décima parte de la altura de un hombre; la que hey desde el fondo de la barbilla a la coronilla de la cabeza es la octava parte de la altura de un hombre; la que hay desde parte superior del pecho a la coronille de la cabeza es la sexta perte del hombre; le que hey desde la parte superior del pecho e las raíces del cabello es la séptima parte de toda la altura; la que hay desde los pezones hasta la coronilla de la cabeza es la cuarta parte del hombre. El máximo de enchura de las espaldes es la cuerta parte de la altura. La distencia desde el codo hasta la punta del dedo medio es la quinta parte del hombre; la que hay desde el codo hasta el final de las espaldas es la octava parte. La mano completa es la décima parte. El pie es la séptima parte del hombre. La distancia que hay desde la pienta del pie hasta debajo de la rodilla es la cuarta parte del hombre.

Según vemos por algunas ordenanzas del parlamento escocés del siglo XV el golf, nació an Escocia, aunque también lo jugaban en Inglaterra da donde pasó a la India en al siglo XIX. En España el primer club de golf fue creado en Las Palmas de Gran Canaria a finales del siglo XIX y a principios del XX se creó an Madrid el Real Club de Puerta de Hierro. Las reglas del juego están hechas con arraglo al código escocés y la regla básica es que la pelota debe jugarse donda quiera que está y no debe ser tocada. Estas reglas de juego rigen para todo el mundo.

Los torneos open son los que puedan participar tanto aficionados como profesionales, destacando an estos torneos al open de Gran Bretaña, la Copa de Canadá y el Manster de EE.UU., ganado recientemente por el español Severiano Ballesteros, que al ser la segunda vez que realiza esta proeza, tiene derecho de por vida, a participar en dicho torneo.

11.– TABLAS TRIGONOMETRICAS

Según lo expuesto anteriormente, el cálculo de las razones reduce a las del primer cuadrante y todas las demás se calculan en base a éstas. Las razones de los ángulos de 0°, 30°, 45° y 90° son exactas y fáciles de calcular pero las restantes se tienen que calcular por aproximación, por ello, todos los valores así calculados se suelen agrupar en unas tablas que se denominan "Tablas Trigonométricas", pueden realizarse con cuatro, seis, o más decimales, las que nosotros emplearemos, tienen cinco decimales.

Se trata de tablas con doble entrada en las cuales la primera columna corresponde a los grados que van de O° a 90°, en la primera fila se representan los minutos que van de 10' en 10', de 0' a 60'. Para encontrar la razón trigonométrica de un ángulo busca en la columna el número de grados y después el número de minutos, la intersección corresponderá al valor de la razón trigonométrica.

Por otro lado, como el seno de un ángulo es igual al coseno de ángulo complementario, en la misma tabla leeremos los seno de arriba a abajo y los cosenos de abajo a arriba. Con la tangentes y cotangentes ocurrirá lo mismo, pudiendo leerse ambas en la misma tabla.

En base al empleo de las tablas se nos pueden presentar dos problemas claramente diferenciados, cuando se nos da el ángulo y se nos pide la razón trigonométrica y cuando nos dan la razón nos piden calcular el ángulo al que corresponde. Ambos casos pasan a explicar seguidamente.

A.— Problema directo

Calcular el valor de la razón trigonométrica de un ángulo dado.

Si el ángulo está directamente en las tablas no hay problema.

Ej.: Calcular el seno del ángulo 27° 30'.

En la primera columna de las tablas buscamos 27 y en la primera fila los 30', la intersección de ambos será el valor del seno.

$$\text{sen } 27° 30' = 0{,}46175$$

¿Qué ocurre cuando el ángulo no está contenido en las tablas?

Sea el ángulo 27° 35'. Buscamos en las tablas su inmediatamente anterior, suponiendo que nos piden el seno, tendremos:

$$\text{sen } 27° 30' = 0{,}46175$$

A un aumento de 10' corresponde un aumento de 258 luego a un aumento de 5', que es lo que nosotros queremos, corresponderá X.

$$10' \text{ ———— } 258$$

$$5' \text{ ———— } X$$

$$X = \frac{258 \cdot 5}{10} = 129$$

$$\text{sen } 27° 30' = 0{,}46175$$

$$\Delta \quad 5' = \quad 129$$

$$\text{sen } 27° 35' = 0{,}46304$$

La diferencia que se ha calculado se tiene que sumar en el caso del seno y de la tangente, pero cuando se trata del cálculo de un coseno o cotangente se tiene que restar.

B.— Problema inverso

Dado el valor de la razón trigonométrica de un ángulo nos piden calcular dicho ángulo.

Ej.: Sea tag $\alpha = 1{,}83096$ calcular α

Se busca este valor en las tablas y si no se encuentra, se toma el inmediatamente anterior en nuestro caso 1,82906 que corresponde a la tangente del ángulo 61° 20', luego

$$1{,}82906 \text{ ———— } 61° 20'$$

Ya antes del descubrimiento de América los Mayas utilizaban el caucho natural para múltiples usos. Colón en su primer viaje observó que unos indios haitianos jugaban con una pelota hecha de una sustancia elástica, posteriormente se descubrió que los indios impermeabilizaban vestidos con esta sustancia.

Dando un corte en la corteza de algunas plantas tropicales mana una sustancia blanca llamada latex, que al coagularse produce el caucho crudo.

Hasta 1844 en que Charles Goodyear inventó la vulcenización no se consiguió sacar a este producto toda su utilidad, la vulcanización permite endurecer el caucho sin que pierda su elasticidad. A partir de esta fecha el caucho se convierte en una materia prima de excepcional importancia. .Brasil, principal productor, trató de monopolizar la producción mundial prohibiendo la exportación da semillas de hevea (árbol del caucho). A pesar de las dificultades, los ingleses consiguieron sacar 75.000 semillas que plantaron en Ceilán.

La segunda guerra mundial y las dificultades propias del conflicto, impulsan la obtención del caucho sintético que actualmente se usa en todo el mundo.

Nueva York y Londres, siempre a la cabeza del mundo del espectáculo, cuentan desde hace ya algún tiempo con uno nuevo y sorprendente: el denominado «The New Experiance».

Se trata de uno básicamente musical resuelto íntegramente con medios audiovisuales, y que desde el mismo día de su presentación mereció del público todo tipo de elogios y hoy constituye uno de los cantros de atención más importantes de estas ciudades.

Se basa en la proyección simultánea sobre una o varias pantallas gigantes de un determinado número de imágenas fijas, las cuales aparecen, permanecan, se funden, cambian de color, se multiplican y animan al ritmo de la música y la palabra.

Este «milagro» de coordinación entre música e imágenes es posible gracias a los modernos programadores electrónicos, los cuales controlan y accionan un alto número de proyectores de diapositivas da acuerdo con las «ordenes» recibidas de la banda sonora.

Este calidoscopio de imágenes envueltas por un sonido en alta fidelidad, dan como resultado un bellísimo espectáculo, original y sorprendante.

A la multidivisión se la ha definido como «El espectáculo de la década de los ochanta».

A un incremento de 10' le corresponde un incremento de 1271 en el valor de la razón, luego

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta & 1271 & \text{——————} \quad 10' \\ \Delta & 190 & \text{——————} \quad X' \end{array}\right\}$$

$$X = \frac{190 \cdot 10}{1271} \simeq 1'$$

$$1{,}83096 = \operatorname{tg} 61° 21'$$

$$\operatorname{artg} 1{,}83096 = 61° 21'$$

Ej.: Si $\cos \alpha = 0{,}95308$ calcular α

Primero se busca en las tablas pero si no está en las mismas, se pone el inmediatamente superior, en nuestro caso el 0,95327 que corresponde al coseno del ángulo 17° 30'

$$0{,}95327 \quad \text{——————} \quad 17° 30'$$

A un incremento de 10' sobre el ángulo corresponde un incremento de 64 en su coseno, luego

$$\begin{array}{lll} \Delta & 88 & \text{——————} \quad \Delta \ 10' \\ \Delta & 64 & \text{——————} \quad X \end{array}$$

$$X = \frac{64 \cdot 10}{88} \simeq 7'$$

$$\operatorname{arcos} 0{,}95308 = 17° 37'$$

NOTA.—Quede bien claro, que en el caso del seno y la tangente se realizan las operaciones en base a la difra inmediatamente inferior, mientras que en los casos de coseno contangente se toma como referencia la cifra inmediatamente superior.

A continuación publicamos las tablas trigonometricas con cinco decimales, se trata de tablas con doble entrada en las cuales la primera columna corresponde a los grados que van de 0° a 90°; en la primera fila se representan los minutos que van de 10 en 10, de 0 a 60. Para encontrar la razón trigonométrica de un ángulo se busca en la columna el número de grados y después el número de minutos, la intersección corresponderá al valor de la razón trigonométricas.

Por otro lado, como el seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario, en la misma tabla leeremos los senos de arriba a abajo y los cosenos de abajo a arriba. Con las tangentes y contangentes ocurrirá lo mismo, pudiendo leerse ambas en la misma tabla.

Seno

Grados	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0.00000	0.00291	0.00582	0.00873	0.01164	0.01454	0.01745	89
1	0.01745	0.02036	0.02327	0.02618	0.02908	0.03199	0.03490	88
2	0.03490	0.03781	0.04071	0.04362	0.04653	0.04943	0.05234	87
3	0.05234	0.05524	0.05814	0.06105	0.06395	0.06685	0.06975	86
4	0.06976	0.07266	0.07556	0.07846	0.08136	0.08426	0.08716	85
5	0.08716	0.09005	0.09295	0.09585	0.09874	0.10164	0.10453	84
6	0.10453	0.10742	0.11031	0.11320	0.11609	0.11898	0.12187	83
7	0.12187	0.12476	0.12764	0.13053	0.13341	0.13629	0.13917	82
8	0.13917	0.14205	0.14493	0.14781	0.15069	0.15356	0.15643	81
9	0.15643	0.15931	0.16218	0.16505	0.16792	0.17078	0.17365	80
10	0.17365	0.17651	0.17937	0.18224	0.18509	0.18795	0.19081	79
11	0.19081	0.19366	0.19652	0.19937	0.20222	0.20507	0.20791	78
12	0.20791	0.21076	0.21360	0.26044	0.21928	0.22212	0.22495	77
13	0.22495	0.22778	0.23062	0.23345	0.23627	0.23910	0.24192	76
14	0.24192	0.24474	0.24756	0.25038	0.25320	0.25601	0.25882	75
15	0.25882	0.26163	0.26443	0.26724	0.27004	0.27284	0.27564	74
16	0.27564	0.27843	0.28123	0.28402	0.28680	0.28958	0.29237	73
17	0.29237	0.29515	0.29793	0.30071	0.30348	0.30625	0.30902	72
18	0.30902	0.31178	0.31454	0.31730	0.32006	0.32282	0.32557	71
19	0.32557	0.32832	0.33106	0.33381	0.33655	0.33929	0.34202	70
20	0.34202	0.34475	0.34784	0.35021	0.35293	0.35565	0.35837	69
21	0.35837	0.36108	0.363789	0.36650	0.36921	0.37191	0.37461	68
22	0.37461	0.37730	0.37999	0.38268	0.38537	0.38805	0.39073	67
23	0.39073	0.39341	0.39608	0.39875	0.40141	0.40408	0.40674	66
24	0.40674	0.40939	0.41204	0.41469	0.41734	0.41998	0.42262	65
25	0.42262	0.42525	0.42788	0.43051	0.43313	0.43575	0.43837	64
26	0.43837	0.44098	0.44359	0.44620	0.44880	0.45140	0.45399	63
27	0.45397	0.45658	0.45917	0.46175	0.46433	0.46690	0.46947	62
28	0.46947	0.47204	0.47460	0.47716	0.47971	0.48226	0.48482	61
29	0.48481	0.48735	0.48989	0.49242	0.49495	0.49748	0.50000	60
30	0.50000	0.50252	0.50503	0.50754	0.51004	0.51254	0.51504	59
31	0.51504	0.51753	0.52002	0.52250	0.52498	0.52745	0.52992	58
32	0.52992	0.53238	0.53484	0.53730	0.53975	0.54220	0.54464	57
33	0.54464	0.54708	0.54951	0.55194	0.55436	0.55678	0.55919	56
34	0.55919	0.56160	0.56401	0.56641	0.56880	0.57119	0.57458	55
35	0.57358	0.57596	0.57833	0.58070	0.58307	0.58543	0.58779	54
36	0.58779	0.59014	0.59248	0.59482	0.59716	0.59949	0.60182	53
37	0.60182	0.60414	0.60645	0.60876	0.61107	0.61337	0.61566	52
38	0.61566	0.61795	0.62024	0.62251	0.62479	0.62706	0.62932	51
39	0.62932	0.63158	0.63383	0.63608	0.63832	0.64056	0.64279	50
40	0.64279	0.64501	0.64723	0.64945	0.65166	0.65386	0.65606	49
41	0.65606	0.65825	0.66044	0.66262	0.66480	0.66897	0.66913	46
42	0.66913	0.67129	0.67344	0.67559	0.67773	0.67987	0.68200	47
43	0.68200	0.68412	0.68624	0.68835	0.69046	0.69258	0.69466	46
44	0.69466	0.69675	0.69883	0.70091	0.70298	0.70505	0.70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grados

Coseno

Coseno

Grados	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0.00000	1.00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,986363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90239	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82414.	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77317	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grados

Seno

Tangente

Grados	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0.00000	0.00291	0.00582	0.00873	0.01164	0.01455	0.01746	89
1	0.01746	0.02036	0.02328	0.02619	0.02910	0.03201	0.03492	88
2	0.03492	0.03783	0.04075	0.04366	0.04658	0.04949	0.05241	87
3	0.05241	0.05533	0.05824	0.06116	0.06408	0.06700	0.06993	86
4	0.06993	0.07285	0.07578	0.07870	0.08163	0.08456	0.08749	85
5	0.08749	0.09042	0.09335	0.06629	0.09923	0.10216	0.10510	84
6	0.10510	0.10805	0.11099	0.11394	0.11688	0.11983	0.12278	83
7	0.12278	0.12574	0.12869	0.13165	0.13461	0.13758	0.14054	82
8	0.14054	0.14351	0.14648	0.14945	0.15243	0.15540	0.15838	81
9	0.15838	0.16136	0.16435	0.16734	0.17033	0.17333	0.17633	80
10	0.17633	0.17933	0.18233	0.18534	0.18835	0.19136	0.19438	79
11	0.19438	0.19740	0.20042	0.20345	0.20648	0.20952	0.21256	78
12	0.21256	0.21560	0.21864	0.22169	0.22475	0.22781	0.23087	77
13	0.23087	0.23393	0.23700	0.24008	0.24316	0.24624	0.24933	76
14	0.24933	0.25242	0.25552	0.25862	0.26172	0.26483	0.26795	75
15	0.26795	0.27107	0.27419	0.27732	0.28046	0.28360	0.28675	74
16	0.28675	0.28990	0.29305	0.29621	0.29038	0.30255	0.30573	73
17	0.30573	0.30891	0.31210	0.31530	0.31850	0.32171	0.32492	72
18	0.32492	0.32814	0.33136	0.33460	0.33783	0.34108	0.34433	71
19	0.34433	0.34758	0.35085	0.35412	0.35740	0.36068	0.36397	70
20	0.36397	0.36727	0.37057	0.37388	0.37720	0.38053	0.38386	69
21	0.38386	0.38721	0.39055	0.39391	0.39727	0.40065	0.40403	68
22	0.40403	0.40741	0.41081	0.41421	0.41763	0.42105	0.42447	67
23	0.42447	0.42791	0.43136	0.43481	0.43828	0.44175	0.44523	66
24	0.44523	0.44872	0.45222	0.45573	0.45924	0.46277	0.46631	65
25	0.46631	0.46985	0.47341	0.47698	0.48055	0.48414	0.48773	64
26	0.48773	0.49134	0.49945	0.49858	0.50222	0.50587	0.50953	63
27	0.50953	0.51319	0.51688	0.52057	0.52427	0.52798	0.53171	62
28	0.53171	0.53545	0.53920	0.54296	0.54673	0.55051	0.55431	61
29	0.55431	0.55812	0.56194	0.56577	0.56962	0.57348	0.57735	60
30	0.57735	0.58124	0.58513	0.58905	0.59297	0.59691	0.60086	59
31	0.60086	0.60483	0.60881	0.61280	0.61681	0.62083	0.62487	58
32	0.62487	0.62892	0.63299	0.63707	0.64117	0.64528	0.64941	57
33	0.64941	0.65355	0.65771	0.66189	0.66608	0.67028	0.67451	56
34	0.67451	0.67875	0.68301	0.68728	0.69157	0.69588	0.70021	55
35	0.70021	0.70455	0.70891	0.71329	0.71769	0.72211	0.72654	54
36	0.72654	0.73100	0.73547	0.73996	0.74447	0.74900	0.75355	53
37	0.75355	0.75812	0.76272	0.76733	0.77196	0.77661	0.78129	52
38	0.78129	0.78598	0.79070	0.79544	0.80020	0.80498	0.80978	51
39	0.80978	0.81461	0.81946	0.82434	0.82923	0.83415	0.83910	50
40	0.83910	0.84407	0.84906	0.85408	0.85912	0.86419	0.86929	49
41	0.86929	0.87441	0.87955	0.88473	0.88992	0.89515	0.90040	48
42	0.90040	0.90569	0.91099	0.91633	0.92170	0.92709	0.93252	47
43	0.93252	0.93797	0.94345	0.94896	0.95451	0.96008	0.96569	46
44	0.96569	0.97133	0.97700	0.98270	0.98843	0.99420	1.00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grados

Cotangente

Cotangente

Grados	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77369	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70620	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97681	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61077	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53986	57
33	1,53986	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grados

Tangente

12. PROBLEMAS SOLUCIONES

Problema 1

Demostrar las siguientes identidades: a) $30^\circ = \frac{\pi}{6}$

b) $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

c) $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

Solución

a) $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Aplicando la tabla de equivalencias entre los distintos sistemas de medida, que se dedujo al principio del presente tema podemos plantear la siguiente regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ radian} \quad \text{——} \quad \frac{180^\circ}{\pi} \\ x \text{ radianes} \quad \text{——} \quad 30^\circ \end{array}\right\} \quad x = \frac{30^\circ \cdot 1}{\frac{180^\circ}{\pi}} = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

b) $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ radian} \quad \text{——} \quad \frac{180^\circ}{\pi} \\ x \text{ radianes} \quad \text{——} \quad 120^\circ \end{array}\right\} \quad x = \frac{120^\circ}{\frac{180^\circ}{\pi}} = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

c) $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

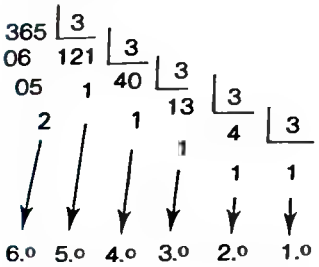
$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ radian} \quad \text{——} \quad \frac{180^\circ}{\pi} \\ x \text{ radianes} - 270^\circ \quad \text{——} \quad 270^\circ \end{array}\right\} \quad x = \frac{270^\circ \cdot 1}{\frac{180^\circ}{\pi}} = \frac{270\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

SISTEMA TERNARIO

Con este sistema hacemos exactamente igual que el senario y tendremos en cuenta que el último cociente y todos los restos serán **números inferiores al tres.**

Convertimos el número 365 (el mismo del anterior) al sistema ternario:



Entonces $365_{(10)} = 111112_{(3)}$

Comprobemos:

$1 \times 3 + 1 = 4$; $4 \times 3 + 1 = 13$; $13 \times 3 + 1 = 40$;

$40 \times 3 + 1 = 121$; $121 \times 3 + 2 = 365$,

Sea el número $222101_{(3)}$ convirtámoslo al sistema decimal.

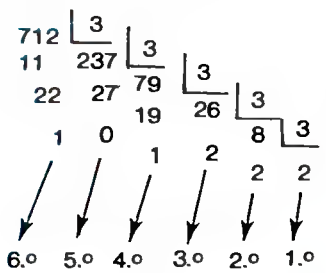
$2 \times 3 + 2 = 8$; $8 \times 3 + 2 = 26$;

$26 \times 3 + 1 = 79$; $79 \times 3 + 0 = 237$;

$237 \times 3 + 1 = 712$

es el 712 en base diez

Comprobemos:



Luego: $222101_{(3)} = 712_{(10)}$

FORMULARIO

O sea que en el sistema senario la fórmula seria:

$$a_u \cdot 6^u + a_{u-1} \cdot 6^{u-1} + \ldots + a_1 \cdot 6 + a_o$$

Asi los coeficientes a_u, a_{u-1}... a_u puede tener cualquier valor comprendido entre **cero y cinco.**

Exactamente igual en el sistema ternario y cuya fórmula sería:

$$a_u \cdot 3^n + a_{u-1} + \ldots + a_1 \cdot 3 + a_o$$

Los coeficientes a_u, a_{u-1} pueden tener cualquier valor comprendido entre **cero y dos**

Fórmula del **sistema binario** (2)

$$a_u \cdot 2^u + a_{u-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_o$$

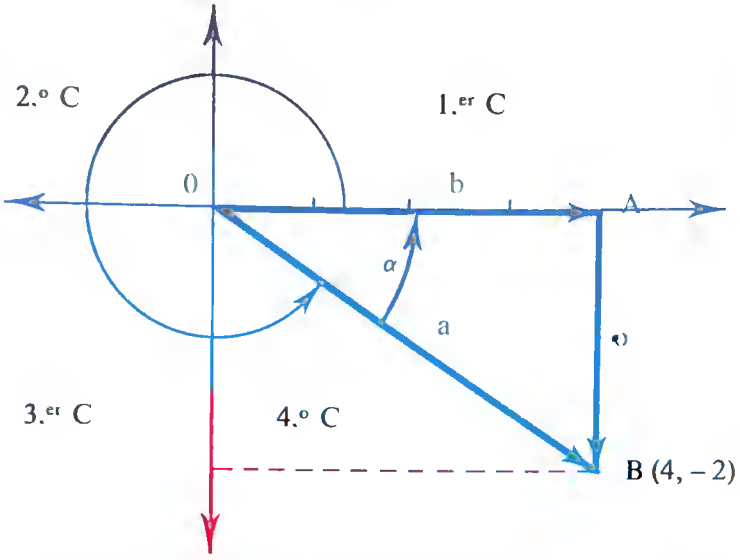
Iya estamos en el sistema binario! ¡Ya estamos entrando en la CIBERNETICA!

Problema 2

Determinar los valores de las razones trigonométricas del ángulo α, si B es un punto del lado terminal y sus coordenados son $(4, -2)$

Solucion

Lo primero que tenemos que hacer es la representación gráfica.



Por el teorema de Pitágoras, calculamos en módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$a^2 = b^2 + o^2;\ a^2 = 4^2 + (-2)^2;\ a^2 = 20$$

$$a = \pm \sqrt{20} = \pm \sqrt{2^2 \cdot 5} = \pm \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = \pm 2\sqrt{5}$$

A continuación aplicamos las definiciones trigonométricas:

$$o = a \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{o}{a} = \frac{-2}{\pm 2\sqrt{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$b = a \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{\pm 2\sqrt{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{o}{b} = \pm \frac{1}{2}$$

Como se ve las soluciones dadas, presentan dos opciones, una positiva y la otra negativa ¿Cuál será la muestra?

El problema se resuelve fácilmente, sólo con fijarnos en qué cuadrante se encuentra el lado termial del ángulo. Si miramos la gráfica se ve que éste, se encuentra en el 4.º cuadrante, por tanto, el seno será negativo y el coseno positivo.

$\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = -\sqrt{5}$

$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ $\sec \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\text{tg } \alpha = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\text{cotg } \alpha = -2$

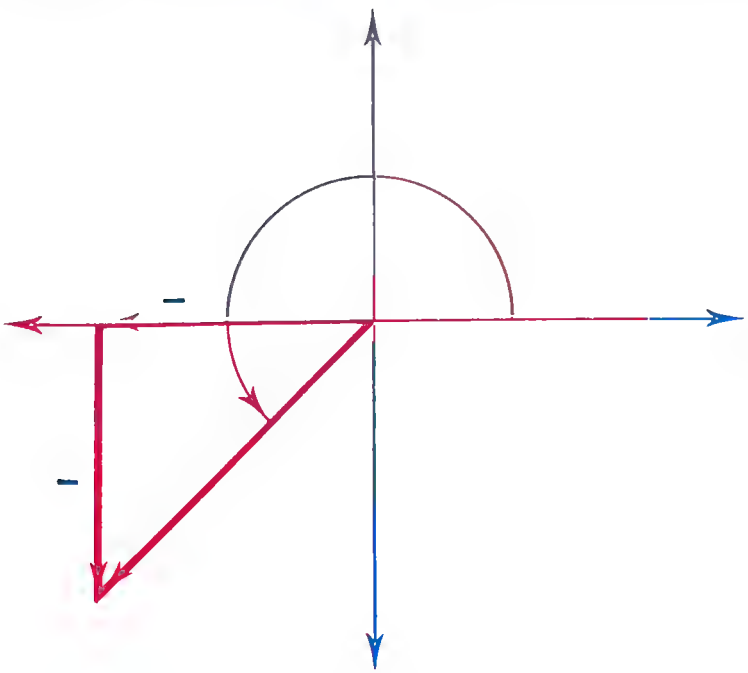
Problema 3

Sabiendo que la $\sec \alpha = -\frac{5}{3}$ y que el ángulo cumple la condición: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Calcular las restantes razones trigonométricas.

Solución

Según en enunciado del problema, nuestro ángulo es mayor que 180 ° y menor que 270 °, por tanto está localizado en el tercer cuadrante.



Aplicando las relaciones trigonométricas conocidas, tendremos:

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

SEGUN LEONARDO DA VINCI

No hay certeza alguna allí donde no se puede aplicar alguna de las ciencias matemáticas o alguna de las que se relacionan con las ciencias matemáticas o algunas de las que se relacionan con las ciencias matemáticas.

Quien niegue la certeza suprema de las matemáticas, fomenta la confusión y nunca podrá desautorizar las contradicciones de las falsas ciencias que conducen a una eterna charlatanería.

En la investigación científica se debe proceder metódicamente; esto es, se debe distinguir entre las diversas partes del tema propuesto, de tal forma que no hay en èl confusión alguna y puede ser bien comprendido.

Hay que procurar que los ejemplos y pruebas que se presenten se definan antes de citarlos.

Un experimento debe repetirse muchas veces para que no pueda ocurrir accidente alguno que obstruya o falsifique la prueba, ya que el experimento puede estar falseado tanto si el investigador trató de engañar como si no.

Entre las principales características de las matemáticas, la de la certeza de las demostraciones es la que eleva la mente de los investigadores.

La mecánica es el paraíso de la ciencia matemática, puesto que por medio de ella se llega a los resultados matemáticos.

Las computadoras son aplicadas hoy dia para conseguir que los ciegos puedan leer cualquier libro. Una empresa especializada ha desarrollado una máquina capaz de leer libros en voz alta.

El libro colocado con las páginas hacia abajo en una pantalla especial es explorando por el aparato que convierte las letras en señales digitas, éstas son analizadas por unos circuitos especiales y las transforma en emisión de voz por medio de un sintetizador.

Los juegos electrónicos también acaparan la atención de los técnicos, el ajedrez por ejemplo parecia condenado al fracaso ya que en un principio se pensó que una computadora podia en el futuro ser el campeón mundial. Pero esta máquina todavía no ha sido inventada. Esta carencia se debe a la forma de que juegan los campeones.

En cualquier lugar del tablero los movimientos y las combinaciones son infinitas.

Los ajedrecistas no utilizan mentalmente gran número de movimientos, solo utilizan movimientos prometedores, además utilizan métodos y movimientos intuitivos y fuera de lógica que en muchos casos ni ellos mismos comprenden. Los circuitos actuales pueden evaluar 5.000 posiciones por segundo, pero se ven desbordadas por los superdotados cerebros de los campeones de este antiguo y maravilloso juego.

sustituimos la secante por su valor numérico

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \left(-\frac{5}{3}\right)^2; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25}{9}$$

Despejamos $\operatorname{tg}^2 \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25}{9} - 1; \qquad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25-9}{9}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{16}{9}; \qquad \operatorname{tg}^2 \alpha = \pm \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \pm \frac{4}{3}$$

En nuestro caso, como nos estamos refiriendo al tercer cuadrante la tangente será positiva:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Por otro lado:

$$\sec \alpha = \frac{-5}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}$$

Aplicando la relación:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

sustituyendo, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1; \qquad \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}; \qquad \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{25-9}{25};$$

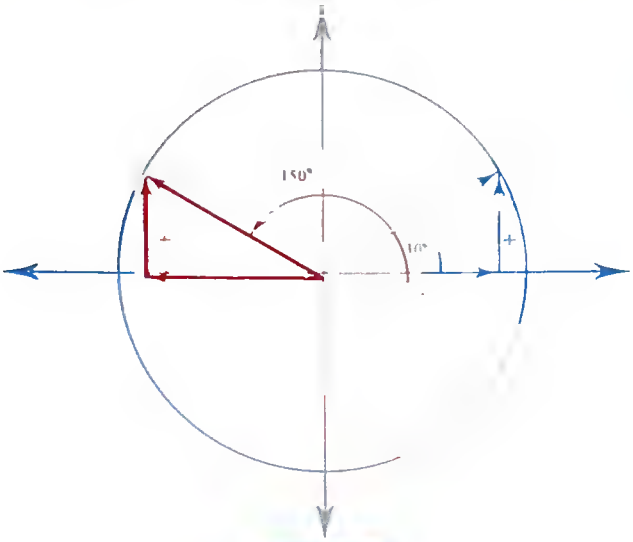
$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{16}{25}; \qquad \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} \pm \frac{4}{5}$$

Como nosotros estamos en el tercer cuadrante, dónde el seno del ángulo es siempre negativo, de las dos soluciones, nos quedamos con la negativa.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = -\frac{4}{5} \qquad \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{4}$$

Ejemplo 4

Calcular el valor de la tangente, cotangente, secante y cosecante del ángulo $\alpha = 150°$, en base a las razones trigonométricas del ángulo de 30° (su suplementario).



Solución

$$\text{tg } 150° = -\text{tg } 30 = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\boxed{\text{tg } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{cotg } 150° = \frac{1}{\text{tg } 150} = \frac{1}{-\text{tg } 30} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

Racionalizamos:

$$\text{cotg } 150° = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{cotg } 150° = -\sqrt{3}}$$

$$\text{sec } 150° = \frac{1}{\cos 150°} = \frac{1}{-\cos 30} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Racionalizamos:

$$\text{sec } 150° = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\text{sec } 150° = \frac{-2\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{cosec } 150° = \frac{1}{\text{sen } 150°} = \frac{1}{\text{sen } 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\boxed{\text{cosec } 150° = 2}$$

EGIPTO

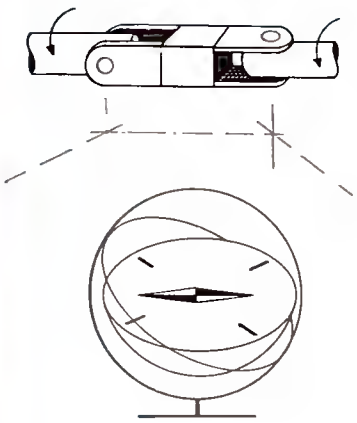
Desde sus orígenes, los egipcios construyeron templos dedicados a las divinidades y templos de uso funerario.

En el templo consagrado a la divinidad, el habitáculo de los hombres estaba dividido en tres partes: tras una monumental puerta se entraba a un patio rodeado de pórticos con salas y capillas alrededor. A este patio, se permitía la entrada a los profanos los días de fiesta. La segunda puerta, comunicaba con la sala de visitas, donde el dios recibía a los huéspedes más distinguidos. La tercera parte era el santuario propiamente dicho, aquí el sumo sacerdote rendía culto a la imagen del dios.

El más famoso fue el templo dedicado a Jonsú, que después de una gran avenida de esfinges, tenía dos grandes abeliscos que encuadraban el pilono de entrada.

Ramsès II construyó el templo de Abri-Simbel haciendo horadar la roca sobre un acantilado que domina el Nilo con la misma distribución clásica, es decir, la tripartita, sólo que hizo construir varias murallas concéntricas.

El culto al sol, se realizaba al aire libre y en terrazas destinadas a tal fin, en cuyo centro se alzaba una pirámide o un obelisco que constituía el emblema solar.

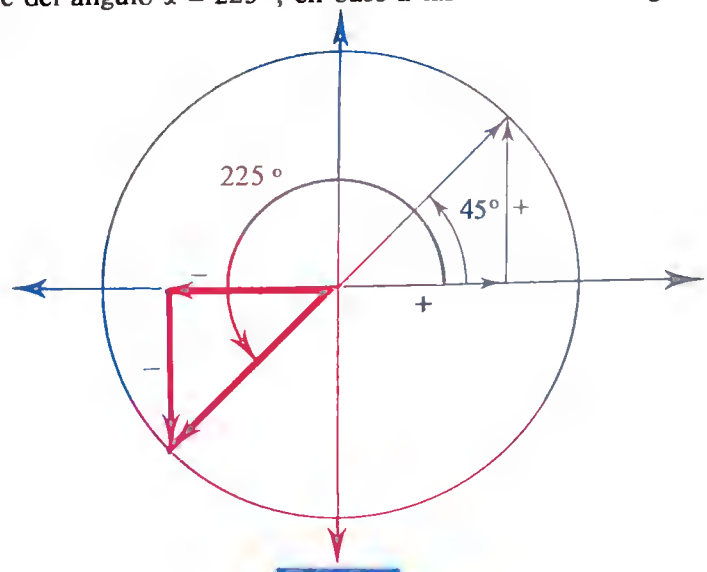


GEROLAMO CARDAN O CARDANO

Matemático italiano. Fue el inventor de un dispositivo mecánico verdaderamente vital e imprescindible hoy dia, la suspensión y la transmisión que lleva su nombre, La Suspensión Cardan, es un dispositivo basado en la propiedad de que dos circunferencias o anillos, uno de los cuales el interior puede girar alrededor de un eje perpendicular al otro tiene un punto siempre que es el centro de ambos, sobre este dispositivo van montadas todas las brújulas de navegación de barcos y aviones evitando que las oscilaciones influyan en sus condiciones. Así mismo la transmisión Cardan sirve para transmitir un movimiento rotativo cuando los dos ejes formados forman un eje con un ángulo variable.

Problema 5

Calcular el valor de la tangente, cotangente, secante y cosecante del ángulo $\alpha = 225°$, en base a las razones del ángulo de $45°$



Solucion

$\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg} 45° = 1;$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 225° = 1$

$\operatorname{cotg} 225° = \operatorname{cotg} 450 = 1;$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} 225° = 1$

$$\sec 225° = \frac{1}{\cos 225°} = \frac{1}{-\cos 45°} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

Racionalizamos:

$$\sec 225° = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\sec 225° = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 225° = \frac{1}{\operatorname{sen} 225°} = \frac{1}{-\operatorname{sen} 45°} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

Racionalizamos:

$$\operatorname{cosec} 225° = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec} 225° = -\sqrt{2}}$$

TEMA 29

AMPLIACION DE LA TRIGONOMETRIA

INDICE

1. RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO (a ± b)
2. RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO 2 α
3. RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO $\alpha/2$
4. TRANSFORMACION DE SUMAS EN PRODUCTOS.
5. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.
   - 5.1. Función y = sen x
   - 5.2. Función y = cos x
   - 5.3. Función y = tag x
   - 5.4. Función y = sec x
   - 5.5. Función y = cosec x
   - 5.6. Función y = cotg x
6. PROBLEMAS. SOLUCIONES.

TEMA 29

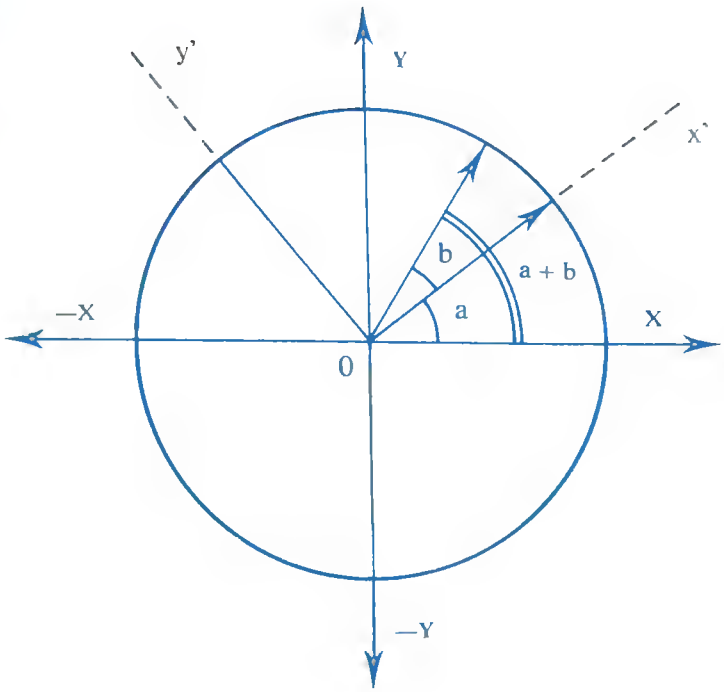
¿Cómo definiría la calidad de un reloj?

Un reloj es tanto mejor cuanto más tiempo tarde en dar nuevamente la hora exacta.

Me explico. Ponemos un reloj en hora, pensemos que cualquier reloj por muy bueno que sea siempre atrasa o adelanta algo. Si atrasa o adelanta, (aunque sólo sea centésima de segundo) siempre atrasará o adelantará en progresión aritmética y tomando como razón lo que atrasa o adelanta en un día. Cuantos más meses, años o siglos tarde en dar nuevamente la hora exacta, mejor será.

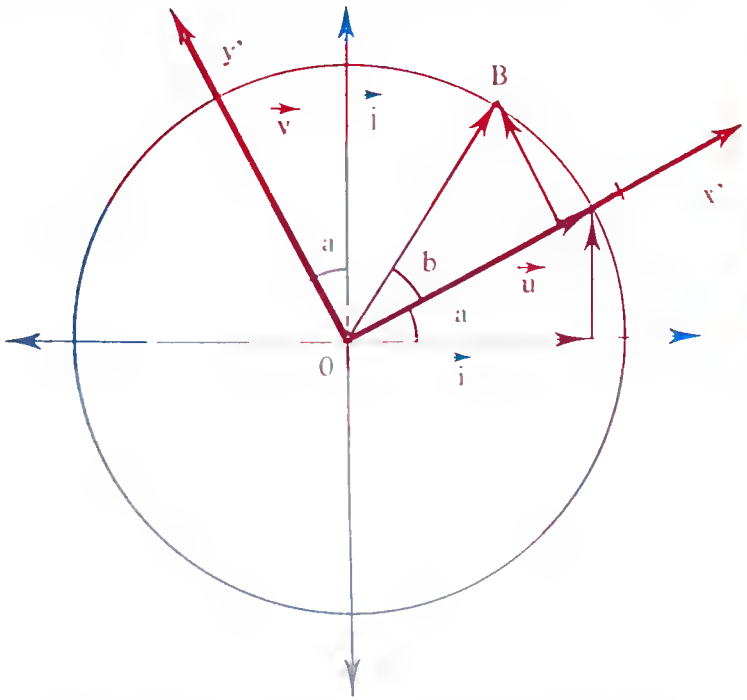
1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ANGULO (a ± b)

A. Estudiaremos primero las razones trigonométricas de la suma, del ángulo (a + b)



Dibujamos en la circunferencia goniométrica los dos ángulos «a» y «b» uno a continuación de otro y establecemos dos sistemas de referencia: XY para el estudio de «a» y x' y' para el estudio de «b».

Representando en la circunferencia los senos y los consenos de ambos ángulos con relación a sus ejes respectivos tendremos:



El vector $\overrightarrow{OA}$ en base a sus sistema de referencia será:

$$\overrightarrow{OA} = \cos a\,\vec{i} + \text{Sen } a\,\vec{j} \qquad (1)$$

El vector $\overrightarrow{OB}$ en base a su sistema de referencia $(O, \vec{u}, \vec{v})$ será:

$$\overrightarrow{OB} = \cos b\,\vec{u} + \text{sen } b\,\vec{v} \qquad (2)$$

Si intentamos referir $\overrightarrow{OB}$ en base al sistema $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tendremos:

$$\overrightarrow{OB} = \cos (a + b)\vec{i} + \text{sen } (a + b)\vec{j} \qquad (3)$$

Igualando las dos últimas expresiones (2) = (3) quedará.

$$\cos b\,\vec{u} + \text{sen } b\,\vec{v} = \cos (a + b)\vec{i} + \text{sen } (a + b)\vec{j} \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta que el vector $\overrightarrow{OA}$ es precisamente igual a $\vec{u}$ podemos afirmar:

$$\vec{u} = \cos a\,\vec{i} + \text{sen } a\,\vec{j} \qquad (5)$$

$$\vec{v} = -\text{sen } a\,\vec{i} + \cos a\,\vec{j}$$

Nótese que la segunda expresión se obtiene al trasladar al segundo cuadrante el ángulo «a», por eso el seno pasa a ser negativo al medirse sobre la parte negativa del eje de las x. Sustituyendo los valores de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ obtenidos en (5), en (4) tendremos:

El siglo XVIII fue un siglo fecundo para las matemáticas, no en el sentido de creación de nuevas ramas sino en el desarrollo de ellas y su aplicación posterior, en especial en el campo del cálculo infinitesimal y de sus aplicaciones.

Los métodos que por obra de Newton y de Leibniz dieron nacimiento al cálculo infinitesimal, se conocieron a finales del siglo XVII, su difusión fue muy lenta porque se publicaron en memorias y escritos fragmentados y en publicaciones varias, de forma que sólo fue conocida por los discípulos más allegados, por otra parte, la polémica desatada entre Newton y Leibniz acerca de la prioridad en la invención del cálculo infinitesimal hizo que las investigaciones se realizaran de forma separada y con distinta notación en Inglaterra y en el continente.

En Inglaterra, la herencia Newtoniana dio lugar a un selecto grupo de matemáticos. Berkeley publicó el folleto, «The Analyst» que causó sensación e influyó más o menos visiblemente en los seguidores de Newton, Abraham de Moire dio una fórmula relativa a los números imaginarios, Roger Cotes brillante matemático, muerto prematuramente, cuidó la segunda edición de los «principios de Newton».

El calendario Gregoriano cuenta los años a partir del nacimiento de Cristo. Diversos pueblos han contado los años a partir de otras fechas famosas, los judíos de la fecha considerada por ellos de la creación del mundo, los musulmanes de la fecha en que Mahoma huyó de la Maca a Medina, etc., la era cristiana también llamada de Jesucristo o era vulgar, fue creada a petición del Papa Juan I que encargó a Dionisio el Exiguo, monje experto en matemáticas que calculase la fecha exacta del nacimiento de Cristo. Dionisio aseguró que Jesús nació el 25 de diciembre del año 753 de la fundación de Roma. Este sistema cronológico se extendió con mucha lentitud, la cancillería papal lo adoptó durante el pontificado de Juan XIII, en Europa se generalizó en el siglo XI pero España no lo adoptó hasta el siglo XIV la Cronologia de Dionisio fue puesta en duda porque se cree que cometió un error de cálculo creyéndose que la era cristiana debía comenzar 4 años antes. Sin embargo, el uso y la tradición han consagrado la era cristiana de acuerdo con sus cálculos.

Los calendarios más importantes se corresponden con el cristianismo según la siguiente tabla:

calendario Gregoriano	1984
calendario Judaico	5745
calendario Griego	2296
calendario Musulman	1405
calendario Romano	2737
calendario Japonés	2644
calendario Indio	1906

$$\cos b\,(\cos a\,\vec{i} + \operatorname{sen} a\,\vec{j}) + \operatorname{sen} b\,(-\operatorname{sen} a\,\vec{i} + \cos a\,\vec{j}) =$$

$$\cos (a + b)\vec{i} + \operatorname{sen} (a + b)\vec{j}$$

$$\cos (a + b)\vec{i} + \operatorname{sen} (a + b)\vec{j} =$$

$$\cos b \cos a\,\vec{i} + \operatorname{sen} a \cos b\,\vec{j} - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a\,\vec{i} + \operatorname{sen} b \cos a\,\vec{j}$$

$$\cos (a + b)\vec{i} + \operatorname{sen} (a + b)\vec{j} =$$

$$(\cos b \cos a - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a)\vec{i} + (\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a)\vec{j}.$$

Estas igualdades escalares se pueden poner como igualdades vectoriales con lo cual, nos quedarían las siguientes expresiones:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

Aplicando la definición de tangente podríamos calcular la mediante el cociente de las dos expresiones anteriores:

$$\operatorname{tag} (a + b) = \frac{\operatorname{sen} (a + b)}{\cos (a + b)}$$

$$\operatorname{tag} (a + b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

Dividiendo numerador y denominador entre cos a cos b nos queda.

$$\operatorname{tag} (a + b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}$$

Simplificando la expresión anterior tendremos:

$$\operatorname{tag} (a + b) = \frac{\operatorname{tag} a + \operatorname{tag} b}{1 - \operatorname{tag} a \operatorname{tag} b}$$

B. De forma análoga a la anterior podríamos deducir las razones trigonométricas del ángulo (a – b)

Si sustituimos (– b) por (x) podríamos poner las fórmulas deducidas anteriormente de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen} (a + x) = \operatorname{sen} a \cos x + \cos a \operatorname{sen} x$$

$$\cos (a + x) = \cos a \cos x - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} x$$

Teniendo en cuenta el signo de las razones de los ángulos opuestos y sustituyendo (x) por (– b) nos quedaría.

$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$$

Dividiendo las dos expresiones anteriores obtendríamos el valor de la tangente:

$$\text{tag } (a - b) = \frac{\text{sen } (a - b)}{\cos (a - b)}$$

$$\text{tag } (a - b) = \frac{\text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b}{\cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b}$$

Dividido entre cos a cos b tendríamos:

$$\text{tag } (a - b) = \frac{\dfrac{\text{sen } a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\cos a \text{ sen } b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\text{sen } a \text{ sen } b}{\cos a \cos b}}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\text{tag } (a - b) = \frac{\text{tag } a - \text{tag.} b}{1 + \text{tag } a \text{ tag } b}$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO 2 α

Recordemos primero las fórmulas del seno y el coseno deducidas en el primer epígrafe del tema:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

Si en dichas fórmulas hacemos $\beta = \alpha$ nos quedará el ángulo $\alpha + \alpha = 2\alpha$, objeto de nuestro estudio y podremos deducir fácilmente el valor de sus razones:

$$\cos (\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \text{sen } \alpha \text{ sen } \alpha$$

Efectuando los productos:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

$$\text{sen } (\alpha + \alpha) = \text{sen } \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \text{ sen } \alpha$$

Efectuando la suma por tener ambos sumandos los mismos términos.

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$$

LOS FENICIOS

Vivieron a las orillas del Mediterráneo en lo que hoy se conoce por Líbano. En su territorio había muchos bosques de cedros que les servían para construir sólidas naves y dedicarse a comercio marítimo.

En poco tiempo se convirtieron en grandes navegantes, desarrollando conocimientos astronómicos y matemáticos para orientarse en alta mar. Llegaron con sus naves hasta Inglaterra y descubrieron las misnas de estaño de las islas Scilly. En España encontraron plomo plata y hierro.

Producían tejidos de vivo color rojo púrpura que extraían de un molusco. Consideraban la púrpura como una mercancía preciosa al igual que la seda, el oro.

Los fenicios establecieron colonias para efectuar mejor su comercio y asegurarse el aprovisionamiento en sus viajes, así fundaron las ciudades de Cádiz y Málaga en España, Caglian en Cerdeña, Palermo en Sicilia, pero la más famosa fue la ciudad de Cartago en las costas africanas.

Su religión era politeista e incluso llegaron a ofrecer a sus dioses sacrificios humanos.

Los fenicios inventaron el alfabeto fonético: para cada sonido de la lengua hablada establecieron un signo.

A pesar de todas estas contribuciones a la historia, Fenicia no fue nunca un Estado sino que cada ciudad era independiente de las demás.

Se cree que fue en América del Norte donde aparecieron los primeros caballos, hace cerca de 60 millones de años. Dichos caballos fueron evolucionando a través de los siglos y extendiéndose por Sudamérica y parte de Asia desde donde los trajeron a Europa.

Los sirios y los persas fueron grandes criadores de caballos para tiro y silla, aunque la equitación, fueron los partos quienes la dieron más impulso, llegando a introducir sus caballos en China.

En época de Alejandro Magno fue cuando Grecia dio gran importancia a los caballos en la guerra, como medio de transporte y ataque, considerando a los que sabían montar a caballo como seres superiores, de ahí viene la leyenda de los centauros.

En la antigua Roma eran también de gran utilidad los caballos para la guerra y los juegos de destreza y carreras de competición.

La tangente la calculamos mediante el cociente entre el seno y el coseno anteriormente calculadas:

$$\operatorname{tag} 2\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\operatorname{tag} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

La última expresión es equivalente a:

$$\operatorname{tag} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha}$$

Dividiendo numerador y denominador entre $\cos\alpha \cos\alpha$, tendremos:

$$\operatorname{tag} 2\alpha = \frac{\dfrac{2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\alpha} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha \cos\alpha}}$$

Simplificándola:

$$\operatorname{tag} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tag}\alpha}{1 - \operatorname{tag}^2\alpha}$$

NOTA. Al ángulo 2α se le conoce normalmente con el nombre de **ángulo doble.**

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO

Para deducir las razones trigonométricas de este ángulo hay que recordar primeramente una de las relaciones fundamentales anteriormente estudiadas.

$$\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$$

Si de esta igualdad restamos la obtenida para el coseno del ángulo doble tendremos:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \\ -\cos 2a &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \\ \hline 1 - \cos 2a &= 2 \operatorname{sen}^2 a \end{aligned}$$

Despejando el $\operatorname{sen}^2 a$ tenemos:

$$\operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Para eliminar el exponente sacamos la raíz cuadrada:

$$\operatorname{sen} a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

Realizamos un cambio de variable, llamamos:

$$2\,a = \alpha$$

$$a = \frac{\alpha}{2}$$

Trasladando el cambio a la fórmula nos queda:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Para el cálculo del coseno en lugar de restar sumamos las dos expresiones de partida

$$\begin{array}{r} 1 = \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \\ +\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \\ \hline 1 + \cos 2\,a = 2\cos^2 a \end{array}$$

Despejando $\cos^2 a$, queda:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2\,a}{2}$$

Sacamos la raíz cuadrada para eliminar el exponente

$$\cos a = \sqrt{\frac{1+\cos 2\,a}{2}}$$

Realizamos el cambio de variable;

$$2\,a = \alpha \qquad a = \frac{\alpha}{2}$$

El coseno nos quedaría:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Para calcular la tangente realizamos el cociente entre el seno y el coseno:

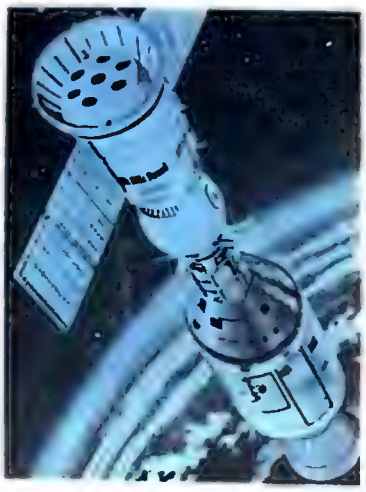
$$\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha/2}{\operatorname{sen}\alpha/2}$$

$$\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Fueron los árabes quienes a través de sus dominaciones trajeron sus caballos a España, donde el caballo andaluz adquirió gran preponderancia.

Para la guerra y a causa de las armaduras fueron necesarios caballos más fuertes. En Inglaterra con la mezcla de caballos árabes y bereberes, crearon el pura sangre inglés que con las carreras, a las que los ingleses son tan aficionados, fue mejorando su raza hasta ser junto al árabe y andaluz, el mejor del mundo.

Tanto en la Historia como en la Literatura y Las Bellas Artes, el caballo ha tenido gran importancia. Recordemos el caballo del Cid, Babieca, el de D. Quijote, Rocinante. Y las preciosas estatuas ecuestres de reyes y militares, así como los retratos hechos por los más afamados pintores, como Velázquez, a distintos personajes históricos.



En las últimas décadas, el afán de conquista y curiosidad del hombre, le ha llevado a realizar viajes por el espacio, mediante unas naves adecuadas, que los científicos han construido después de muchas investigaciones. Estas naves o cohetes son los únicos capaces de vencer la gravedad de la Tierra, gracias a la gran velocidad que alcanzan, más de 30.000 Km. a la hora.

En un principio estas naves no llevaban a bordo ningún tripulante, y eran dirigidas desde la Tierra mediante un complejo sistema de comunicación. Más tarde, aparecieron los primeros astronautas o encargados de dirigir las naves. La utilidad de estos vuelos consistía en recoger toda la información posible sobre aquellos satélites que rodean a la Tierra. El primer éxito destacado de la llamada «Carrera espacial» fue la llegada del hombre a la Luna, en julio de 1969, que supuso todo un acontecimiento a nivel mundial.

Englobándolo en una sola raíz:

$$\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Realizando el cociente:

$$\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha)}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Como vemos todas las razones están calculadas en base al coseno del ángulo.

NOTA. Al ángulo $\alpha/2$ se le conoce normalmente con el nombre de **ángulo mitad.**

4. TRANSFORMACION DE SUMAS EN PRODUCTOS

Para facilitar ciertos cálculos es interesante la obtención de una serie de relaciones que nos permitan la transformación de sumas y restas en productos.

Partimos primeramente de las fórmulas de los senos del ángulo $(a \pm b)$.

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\cos a\operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cos b-\cos a\operatorname{sen} b$$

Sumando las dos expresiones nos queda.

$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen} a\cos b \quad (1)$$

Realizamos un cambio de variable denominando:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=A \\ a-b=B \end{array}\right\}$$ Solucionando el sistema podemos deducir los valores de «a» y «b» en base a «A» y «B».

$$\left.\begin{array}{l} a=A-b \\ a=B+b \end{array}\right\} \quad A-b=B+b \Rightarrow 2b=A-B \qquad b=\frac{A-B}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} b=A-a \\ b=a-B \end{array}\right\} \quad A-a=a-B \Rightarrow 2a=A+B \qquad a=\frac{A+B}{2}$$

Trasladando los cambios a la ecuación (1) nos queda:

$$\text{Sen } A + \text{Sen } B = 2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Restemos ahora las dos expresiones de partida para calcular la diferencia

$$\begin{array}{r} \text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b \\ -\text{ sen } (a-b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b \\ \hline \text{sen } (a+b) - \text{sen } (a-b) = 2 \cos a \text{ sen } b \end{array} \qquad (2)$$

Realicemos el cambio de variables.

$$A = a + b$$

$$B = a - b$$

$$a = \frac{A+B}{2}$$

$$b = \frac{A-B}{2}$$

Trasladándolo a la fórmula (2):

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \text{ sen } \frac{A-B}{2}$$

Haciendo los mismos cálculos en base a los cosenos tendremos:

$$\begin{array}{r} \cos (a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \\ \cos (a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \\ \hline \cos (a+b) + \cos (a-b) = 2 \cos a \cos b \end{array}$$

Realizando el cambio de variables:

$$A = a + b \qquad a = \frac{A+B}{2}$$

$$B = a - b \qquad b = \frac{A-B}{2}$$

Quedaría:

$$\cos A \text{ y } \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Debido al alto coste de estos vuelos, únicamente las dos superpotencias, Estados Unidos y la U.R.S.S., han conseguido desarrollar programas de investigación espacial, que al igual que en otras facetas, supone un punto de competencia entre ambas naciones. También en Europa se ha intentado crear un Centro de Investigaciones espaciales, donde cada país aporta una parte, tanto en investigaciones como en dinero.

En la actualidad los viajes por el espacio, se están desarrollando como algo habitual. Estos viajes tienen varias misiones, como es la de colocar satélites artificiales alrededor de la Tierra, que servirán para las telecomunicaciones entre distintos continentes, así como para obtención de datos atmosféricos que servirán para la prevención del tiempo.

En el futuro se piensa en la creación de estaciones espaciales, dotadas de aparatos para la investigación científica, y en las cuales el hombre pueda permanecer durante un periodo largo de tiempo.

También el no saber tiene sus ventajas.

Ya era conocido en todas las expendidurias de venta de lotería, cierto individuo que andaba buscando desesperadamente el número 47, o los billetes que terminasen en 47. Todos los décimos que encontraba en esas condiciones, los compraba. Incluso se enteró por la dirección general de loterías, donde se había enviado para su venta el número 47. Fue en Reus, y allá se fue. Encontró sólo cinco décimos. Los compró. Volvió a Sevilla y fue comprando terminaciones en 47, hasta que se terminaron. Fue a Málaga e hizo lo propio. Huelva, Granada... Hasta que llegó el día del sorteo.

Primer premio !número 47!

Radio, prensa, televisión, buscando a los agraciados. En Sevilla apareció uno de los agraciados (el de nuestra historia). A las preguntas de los informadores de cómo se había producido la corazonada por el 47, respondió:

¡Durante **siete** noches seguidas estuve soñando con el número **siete.** Por lo tanto es bien fácil deducirlo, ya que como siete por siete son **cuarenta y siete.** Este es el número que tenía que tocar.

Para calcular la diferencia de cosenos:

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ -\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \hline \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{array}$$

Cambiando las variables:

$$A = a + b \qquad a = \frac{A+B}{2}$$

$$B = a - b \qquad b = \frac{A-B}{2}$$

Nos quedaría:

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Para la suma de tangentes haríamos:

$$\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B = \frac{\operatorname{Sen} A}{\cos A} + \frac{\operatorname{Sen} B}{\cos B}$$

Efectuando el quebrado:

$$\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}$$

Observando el numerador vemos que es igual a sen (A + B) luego nos quedaría:

$$\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B}$$

Para calcular la diferencia de tangentes:

$$\operatorname{tag} A - \operatorname{tag} B = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} - \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}$$

Efectuando el quebrado

$$\operatorname{tag} A - \operatorname{tag} B = \frac{\operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}$$

Lo que es equivalente a:

$$\operatorname{tag} A - \operatorname{tag} B = \frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\cos A \cos B}$$

5. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

5.1. «Función y = sen x»

– Como ya se vio anteriormente, esta función es «periódica», es decir:

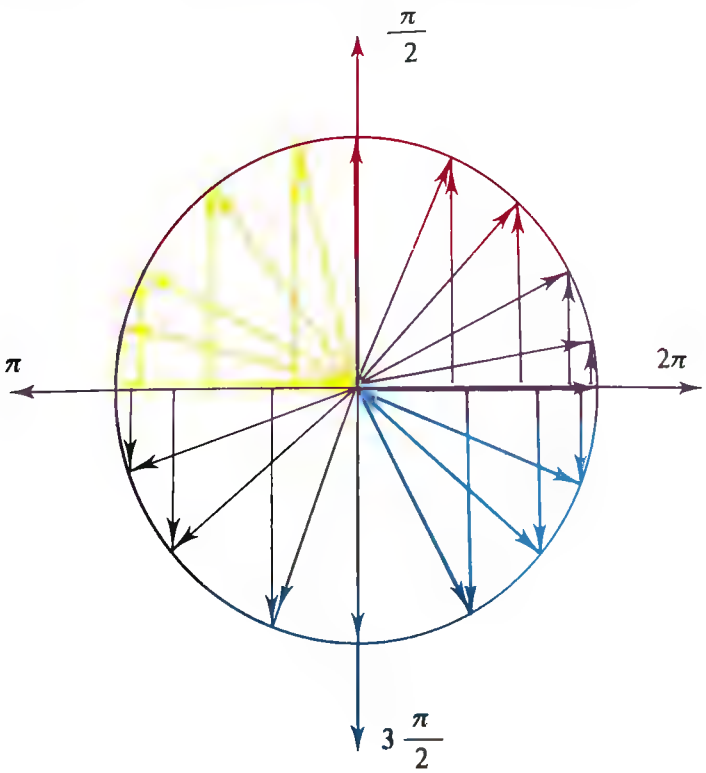
$$\text{sen}\,(x + 2\pi \cdot F) = \text{sen}\,x$$

Por tanto sólo se va a estudiar en el período $(0,2\pi)$.

– Es una función «continua» en todo el período de estudio. Esto se demuestra por la regla de los tres pasos.

«Nota». Esta regla se verá posteriormente al estudiar límites de funciones.

– Al realizar el estudio sobre la circunferencia goniométrica, el valor de la función va a estar comprendido siempre entre + 1 y – 1. Por tanto, fijándonos en la circunferencia, tenemos:



a) Cuando x, crece de 0 º a 90 º (1.er cuadrante), entonces el «seno x» crece de 0 a 1.

b) Cuando x, crece de 90 º a 180 º (2.º cuadrante), entonces el «seno de x» decrece de 1 a 0.

c) Cuando x, crece de 180 º a 270 º (3.er cuadrante), entonces el «seno de x», decrece de 0 a – 1.

d) Cuando x, crece de 270 º a 360 º (4.º cuadrante), entonces el «seno de x» crece de – 1 a 0.

El templo funerario, era el lugar donde se celebraba el culto a un difundo divinizado.

Primero se construyeron estos templos junto a la base de una pirámide. Contenia varios habitáculos alrededor del principal donde reposaba el difunto: uno en forma semicircular como almacén y otro también de la misma forma para, además de santuario, acoger a la parte pública.

En el Imperio medio, esta pirámide fue separada del templo funerario. El de Mentuhotep el grande, estaba precedido por una gran explanada con dos grandes terrazas escalonadas, bordeadas de columnas y al fondo una gran pirámide, detrás un patio y una gran sala exçavada en el interior de la montaña.

Este trazado del Imperio medio, fue utilizado en el Imperio nuevo. La reina Hatsepsut utilizó estos mismos procedimieñtos tanto de diseño como los materiales empleados en la construcción.

Entre los templos funerarios más importantes de este Imperio nuevo, cabe destacar el de Ramesseum, construido por Ramsés II y el de Ramsès III construido en Medimet Ha.

OPERATIVIDAD DEL SISTEMA BINARIO
SUMA

Una vez sabido como se produce la numeración en el sistema binario (0 y 1), vamos a estudiar su operatividad.

Empecamos por la suma y establezcamos una regla, la siguiente:

$$0 + 0 = 0;\ 0 + 1 = 1;$$

$$1 + 0 = 1;\ 1 + 1 = 10$$

NOTA: Este diez, si lo tomamos como unidad de segundo orden, nos dará que uno más uno es igual a CERO Y NOS LLEVAMOS UNA, para añadir al próximo término de la suma.

Veámoslo de forma práctica: busquemos dos números, por ejemplo el 13 y el 7 en sistema decima, pasémoslo al sistema binario.

13	2
1	6 | 2
	0 | 3 | 2
	1 | 1

4ª 3ª 2ª 1ª

$13_{(10)} = 1101_{(2)}$

7	2
1	3 | 2
	1 | 1

3ª 2ª 1ª

$7_{(10)} = 111_{(2)}$

Sumemos los números decimales (13 + 7 = 20) y los números binarios.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 111 \\ \hline \end{array}$$

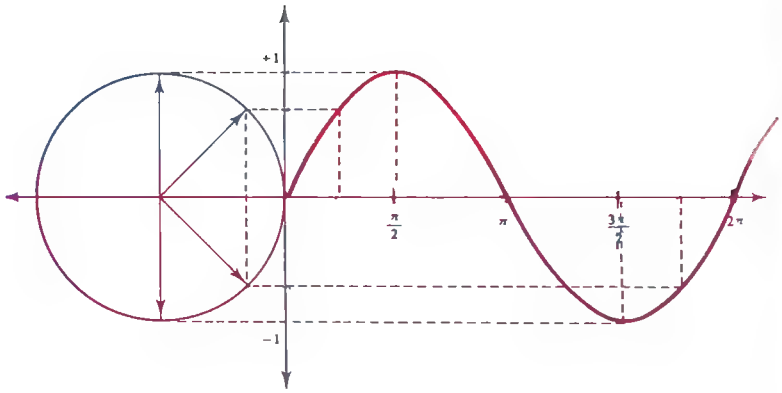
Sumémoslos exactamente igual que en el sistema decimal, pero conforme a la regla establecida anteriormente: cifra de unidades, uno más uno, es cero y nos llevamos **UNA**, cifra decenas, cero más una es una, más uno que me llevo de las unidades

Estos valores los podemos resumir en el siguiente cuadro:

x	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow 3\frac{\pi}{2} \nearrow 2\pi$
y = sen x	$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$

1.er c. 2.º c. 3.er c. 4.º c

A continuación pasamos a representar la gráfica.



5.2. «Función y = cos x»

– Al igual que la función anterior, es periódica, es decir:

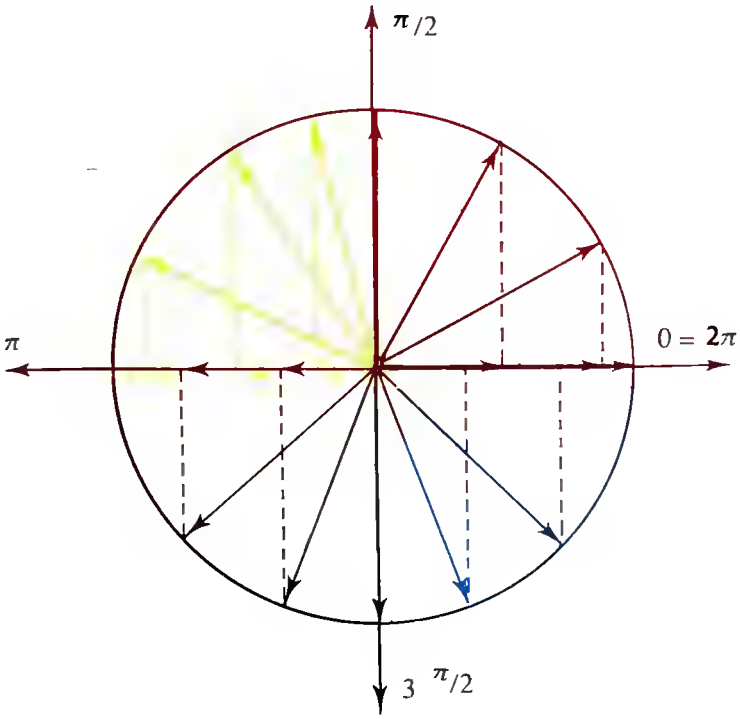
$$\cos(x + 2\pi \cdot K) = \cos x$$

Por tanto, sólo se va a estudiar en el período $(0,2\pi)$.

– Es una función continua en todo el intervalo de estudio $(0,2\pi)$. Esto se demuestra de la misma forma que la función seno de x, mediante la regla de los tres pasos que veremos posteriormente.

– Al realizar el estudio sobre la circunferencia goniométrica, el valor de la función va a estar siempre comprendido entre + 1 y – 1.

Así pues, fijándonos en la circunferencia, tendremos:



a) Cuando x crece de 0 ° a 90 ° (1.er cuadrante), entonces el «coseno de x» decrece de 1 a 0.

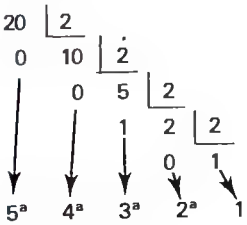
b) Cuando x crece de 90 ° a 180 ° (2.° cuadrante), entonces el «coseno de x» decrece de 0 a – 1.

es cero y también nos llevamos una; cifra centenas, una más una es cero, más una que me llevo de las decenas es una y nos llevamos una, cifra de los millares, una más nada (cero) es una más una que me llevo de las centenas es cero y nos llevamos una, que la ponemos en la cifra de las diezmilésimas.

Hagámoslo:

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 111 \\ \hline 10100 \end{array}$$

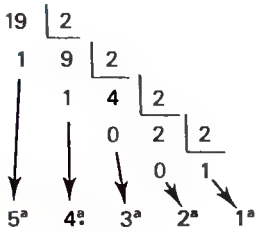
Entonces esta cifra tiene que corresponder al número **VEINTE** (suma de trece y siete) del sistema decimal. Veamos:



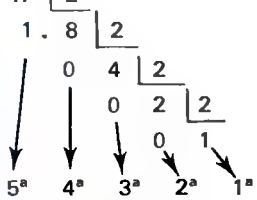
$10100_{(2)} = 20_{(10)}$

Otro ejercicio: Sumemos 19 y 17

$$19 + 17 = 36$$



$19_{(10)} = 10011_{(2)}$



$17 =_{(10)} 10001_{(10)}$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ +\ 10001 \\ \hline 100100 \end{array}$$

c) Cuando x crece de 180 ° a 270 ° (3.er cuadrante), entonces el «coseno de x» crece de – 1 a 0.

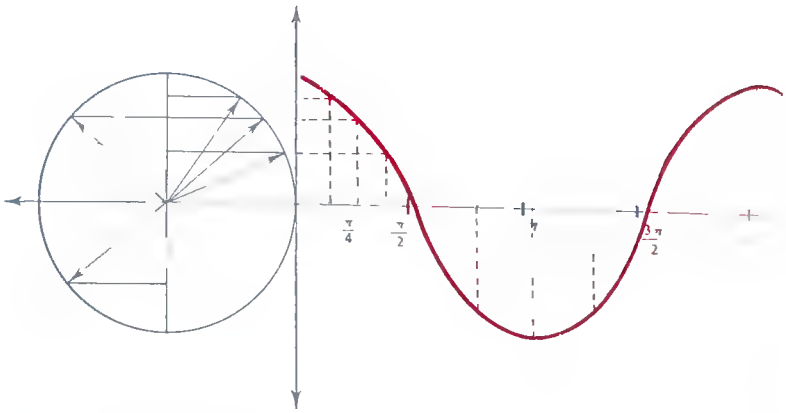
d) Cuando x crece de 270 ° a 360 ° (4.º cuadrante), entonces el «coseno de x» crece de 0 a 1.

Estos valores pueden resumirse en un cuadro.

x	0 → $\frac{\pi}{2}$ → π → $3\pi/2$ → 2π
$y = \cos x$	1 → 0 → -1 → 0 → 1

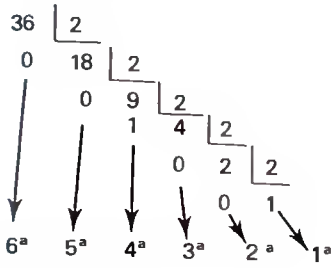
1.er c. 2.º c. 3.er c. 4.º c

Siendo su representación gráfica.



O sea que el número 100100 del sistema binario tiene que corresponder al número 36 del sistema decimal (19 +17 = 36).

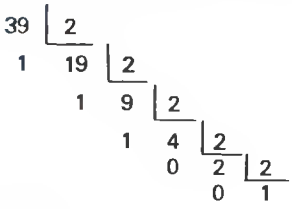
Veámoslo:



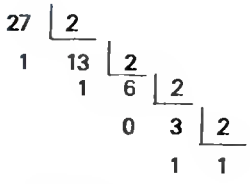
O sea:

$100100_{(2)} = 36_{(10)}$

Otor ejemplo 39 + 27 = 66



$39_{(10)} = 100111_{(2)}$



$27_{(10)} = 11011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 100111 \\ +\ 11011 \\ \hline 1000010 \end{array}$$

O sea, el número $1000010_{(2)}$

tiene que ser el 66 en el sistema decimal, veámoslo:

5.3. «Función y = tg x»

$$y = tgx = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Por tanto el comportamiento de la tangente estará en relación con el de las funciones seno y coseno.

– Al ser un cociente entre un seno y un coseno, será una función continua en todo el intervalo (0,2), excepto en los valores de x, para los que se anula el denominador.

$$\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ x = 270^\circ \end{cases}$$

En estos puntos, presenta una discontinuidad infinita.

– En efecto, en el caso de $\frac{\pi}{2}$ (90 °) Si $x < \frac{\pi}{2}$ pero muy próximo a él, se cumple que (sen x → 1) y que el coseno del ángulo tiene su valor positivo tan pequeño que en realidad tiende a o, (cos x → 0), por tanto, el resultado del cociente, es decir la tangente, tendrá un valor positivo muy elevado, con lo que se podrá decir que tiende a + ∞

$$tg\ x = \frac{1}{0} = +\infty \qquad (tg\ x - +\infty)$$

$$x < \frac{\pi}{2} \qquad x \to \frac{\pi}{2}$$

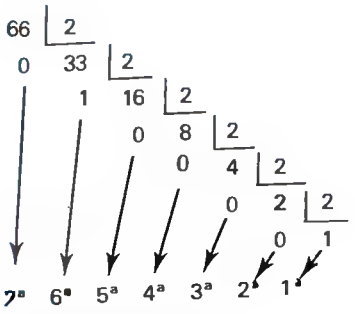
– Por otro lado, en el caso de $\frac{\pi}{2}$ (90 °). Si $x > \frac{\pi}{2}$ pero muy próximo a él, se cumple que (sen x → 1) y que el coseno del ángulo tiene un valor negativo tan grande que en realidad tiende a 0, por lo que la tangente tiende a – ∞

$$tg\ x = -\frac{1}{0} = -\infty \quad (tg\ x - -\infty)$$

$$x > \frac{\pi}{2} \qquad x \to \frac{\pi}{2}$$

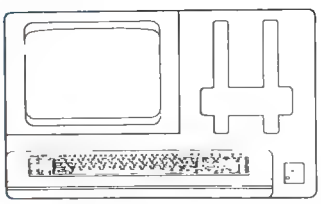
El mismo razonamiento se aplica en el caso de $3\ \frac{\pi}{2}$ (270 °), donde también se presenta una oscilación de +∞ a – ∞

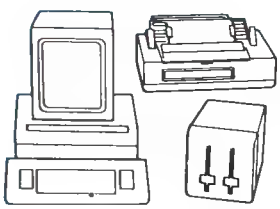
Con todos estos datos descritos anteriormente pasamos a realizar el cuadro de variación de la función y = tg x, que se obtendrá considerando a la vez dos variaciones sufridas por el seno y el coseno de x.

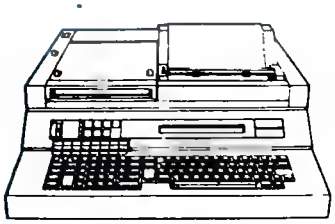


Así: 66 = $1000010_{(2)}$

Podíamos poner mutitud de ejemplos y con números más altos para las sumas, eso es exactamente itgual, el resultado es lo que cuenta tanto para un número de 96 cifras como para uno de dos.







SISTEMA BINARIO
AMPLIACION DE LA SUMA

Vamos a suponer, por ejemplo que tenemos que realizar una suma binaria de varias cifras. Si hacemos la explicación exactamente igual a como la hemos realizado anteriormente, creo que además de no explicarlo bien por mucho empeño que pusiéramos en ello, la comprensión sería muy dificultosa. Lo mejor es irlas sumando al estilo contable, o bien, descomponer la suma en sumandos por parejas. Me explico: primero vamos a ir sumando al estilo contable, o sea a la derecha del segundo sumando se pone la suma del primero y el segundo (sumando) a este resultado se le suma el tercer sumando y se pone a la derecha, a este tercer resultado se le añade el cuarto sumando y el resultado se coloca en la derecha de éste y así sucesivamente.

Sabemos que al **siete** en el sistema decimal, corresponde el uno, uno, uno (111) en el binario. Vamos a sumar por ejemplo, ocho veces el número 7.

Veamos:

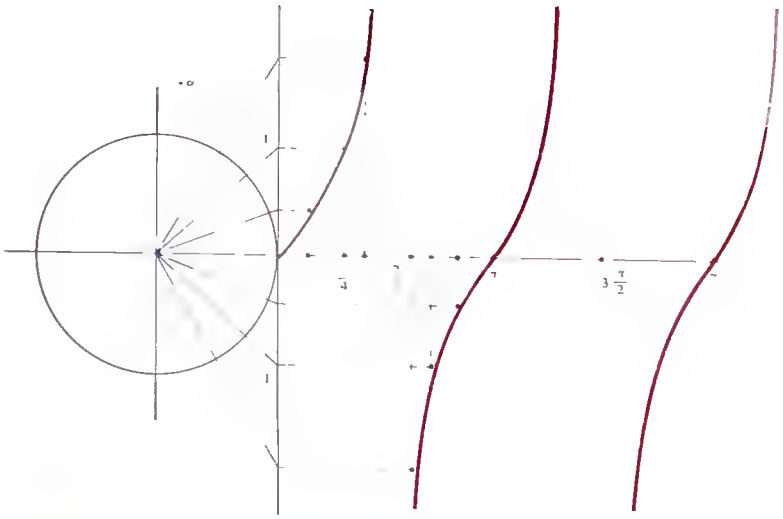
```
111 —    1110
111 —   10101
111 —   11100
111 —  100011
111 —  101010
111 —  110001
111 —  111000
-------------
111000 — 111000
```

Ahora vamos a ir sumando por parejas:

```
111   111   111   111
+111  +111  +111  +111
1110  1110  1110  1110
  \    /      \    /
   1110        1110
  +1110       +1110
  -----       -----
  11100       11100
     \          /
      \        /
       11100
      +11100
      ------
      111000 (2) = 56 (10)
```

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
sen x	0	1	0	− 1	0
cos x	1	0	− 1	0	1
tg x	0	+ ∞ / − ∞	0	+ ∞ / − ∞	0

Siendo su representación gráfica.



6. PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Problema 1

Dado el valor de los senos de «x» e «y» calculan: a) sen (x + y), b) cos (x − y)

$$\text{sen } x = 12/13$$
$$\text{sen } y = 4/5$$

Solucion

Para la resolución de los dos apartados lo primeros que tenemos que hacer es calcularnos el valor de los cosenos de ambos ángulos, para lo cual, utilizamos la expresión fundamental

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

Tendríamos:

$$\text{sen}^2 yx + \cos^2 x = 1$$

Despejando cos x

$$\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$$

Sustituyendo el seno por su valor

$$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{0{,}1479}$$

$$\cos x = 0{,}38$$

Realizando los cálculos para el ángulo «y» tendríamos:

$$\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$$
$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$$

Sustituyendo el seno por su valor:

$$\cos y = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{0{,}36}$$

$$\cos y = 0{,}6$$

a) Sen (x + y) empleamos la fórmula:

$$\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\, x \cos y + \cos x \,\text{sen}\, y$$

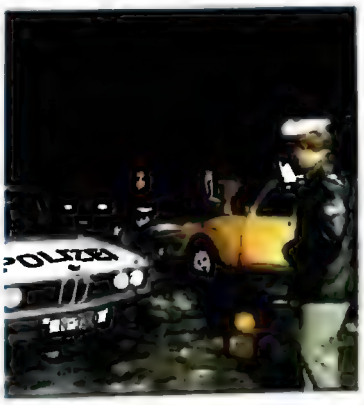
Sustituyendo cada término por su valor:

$$\text{sen}\,(x + y) = \frac{12}{13} \cdot 0{,}6 + 0{,}38 \cdot \frac{4}{5}$$

Operando:

$$\text{sen}\,(x + y) = 0{,}55 + 0{,}304$$

$$\text{sen}\,(x + y) = 0{,}854$$



¡Se ha producido un atropello!

Dos amigos de las matemáticas viajaban por Madrid en un taxi. Delante de ellos, otro coche atropella a un joven. Este coche inmediatamente acelera y se fuga. El taxista cumpliendo con su deber de ciudadano se apea para auxiliar al herido, no sin antes indicar a los pasajeros que desalojen el vehículo para llevar al muchacho herido a algún centro médico para que le presten los auxilios necesarios.

Los dos amigos matemáticos quieren también colaborar. Introducen al herido en el taxi y lo trasladan al sanatorio más cercano.

Después de depositar al atropellado en las manos de los médicos, se presenta la policía a pedirles declaración. El taxista sabía que el coche del atropellado era un Renault 12 metalizado color plateado, pero no sabía más. Uno de los matemáticos dijo: Desde luego la matrícula del coche era de Madrid (M). Compuesta de seis cifras y dos a dos sumaban TRECE, de tal manera que el primero de los números era el más pequeño, los del centro eran dos consecutivos y por orden creciente, y los dos últimos también eran por orden creciente, y ya no me acuerdo de más. ¡A sí!, ninguno de los números se repetía. Si me permite un solo minuto, señor policía, le digo el número completo, sólo un minuto.

La solución en la pág. 896

Cálculo de la última cifra de la potencia de un número.

Para su cálculo vamos a operar con un número impar y pequeño. Que mejor ejemplo que el número TRES. Veamos sus potencias:

$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$

$3^5 = 243$
$3^6 = 729$
$3^7 = 2.187$
$3^8 = 6.561$

$3^9 = 19.683$
$3^{10} = 59.049$
" "
" "
" "

Veamos que cada **cuatro** veces, o lo que es igual, cada vez que la potencia es múltiplo de cuatro, la terminación se repite (3 - 9 - 7 - 1). Así, de esta manera todos los múltiplos de TRES, todos, absolutamente todos, tienen que terminar en estos números: 3 - 9 - 7 - 1.

Por ejemplo, vamos a calcular en qué número terminaría el $3^{1.234}$. No tenemos nada más que dividir el 1.234 entre cuatro nos da 308 más **DOS** de resto. Esto ¿qué quiere decir? Que el número 1.234 cada 308 vueltas de números de grupos de cuatro se repite, pero lo que nos interesa es el resto que el ser **DOS** en el segundo número de estos grupos y este segundo número es el 9 (NUEVE), luego el número $3^{1.234}$ tiene que terminar forzosamente en NUEVE.

NOTA: Hemos puesto el número TRES por mejor comprensión. Podremos hacerlo por supuesto, con cualquiera de los números, paro no se entendería tan claramente como con éste ya que por ejemplo el 4; este número sólo tiene dos terminaciones que son el **CUATRO** y el **SEIS**. Con el número 5 nos ocurrirla peor aún ya que sólo terminaría en cinco. Con el números 6 ocurre lo mismo que con el 5, ya que su cifra final seria seis.

b) $\cos (x - y)$. Aplicando la fórmula:

$$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Sustituyendo cada término por su valor:

$$\cos (x - y) = 0{,}38 \cdot 0{,}6 + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5}$$

Operando:

$$\cos (x - y) = 0{,}228 + 0{,}738$$

$$\cos (x - y) = 0{,}966$$

Problema 2

Expresar como producto las expresiones siguientes:

a) $\operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ$
b) $\cos 38^\circ + \cos 42^\circ$
c) $\cos 60^\circ - \cos 40^\circ$
d) $\operatorname{sen} 42^\circ + \cos 38^\circ$

Solución

Empleando las fórmulas ya estudiadas de sumas y diferencias de senos y cosenos, tendremos:

a) $$\operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \cos \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{40^\circ - 20^\circ}{2}$$

$$\operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 10^\circ$$

Buscando los valores de las distintas razones en las tablas comprobamos que la igualdad se cumple.

$\operatorname{sen} 40^\circ = 0{,}6428$
$\operatorname{sen} 20^\circ = 0{,}3420$
$\cos 30^\circ = 0{,}8660$
$\operatorname{sen} 10^\circ = 0{,}1736$

Trasladando los valores a la expresión:

$$0{,}6428 - 0{,}3420 = 2 \cdot 0{,}8660 \cdot 0{,}1736$$

$$0{,}300 = 0{,}300$$

b) $\cos 38^\circ + \cos 42^\circ = 2 \cos \frac{38^\circ + 42^\circ}{2} \cdot \cos \frac{38^\circ - 42^\circ}{2}$

$$\cos 38^\circ + \cos 42^\circ = 2 \cos 40^\circ \cos (-2^\circ)$$

c) $\cos 60^\circ - \cos 40^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{60^\circ + 40^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{60^\circ - 40^\circ}{2}$

$$\cos 60^\circ - \cos 40^\circ = -2 \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{sen} 10^\circ$$

d) sen 42° y cos 38°. Para la suma del seno de un ángulo y el coseno de otro ángulo, no hemos deducido expresión alguna. Si recordamos las razones de los ángulos complementarios teníamos:

$$\operatorname{sen} \quad = \cos (90^\circ - \alpha)$$

Luego podríamos decir:

$$\operatorname{sen} 42^\circ = \cos (90^\circ - 42^\circ) = \cos 48^\circ$$

Con lo cual la expresión primitiva se transformaría en una suma de cosenos:

$$\operatorname{sen} 42^\circ + \cos 38^\circ = \cos 48^\circ + \cos 38^\circ$$

Empleando la fórmula:

$$\cos 48^\circ + \cos 38^\circ = 2 \cos \frac{48^\circ + 38^\circ}{2} \cos \frac{48^\circ - 38^\circ}{2}$$

$$\cos 48^\circ + \cos 38^\circ = 2 \cos 43^\circ \cos 5^\circ$$

$$\operatorname{sen} 42^\circ + \cos 38^\circ = 2 \cos 43^\circ \cos 5^\circ$$

Problema 3

Demostrar la siguiente igualdad:

$$\cos (a + b) \cos (a - b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

Solución

Partimos del primer miembro para intentar llegar al segundo:

$$\cos (a + b) \cos (a - b) = (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) \cdot (\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) =$$

Empleando las fórmulas de coseno de una suma y coseno de una diferencia:

$$= \cos^2 a \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b =$$

La experiencia nos indica que los daños a personas originado por los terremotos, son a través de la caída total o parcial de edificios, de mobiliario, lámparas, cables de energía eléctrica y vidrios rotos, así como por los estragos del fuego, cuyos efectos se ven agravados en ocasiones por la carencia de agua, debida a las roturas en las redes de abastecimiento. En algunos casos estos daños pueden incrementarse por actuaciones humanas, provocadas por el pánico.

Una de las escalas macrosísmicas más empleadas es la Mercalli, que distingue 12 grados diferentes en los terremotos según sus efectos. Estos son:

I. No perceptible.

II. Perceptible por algunas personas en reposo. Se mueven algunos objetos en equilibrio inestable.

III. Perceptible en los interiores. Se mueven algunos coches no frenados.

IV. Perceptible en los exteriores. Vibran las ventanas.

V. Perceptible por todo el mundo. Caen algunas cornisas. Se paran los relojes de péndulo. Se rompe algún cristal.

VI. Caen algunas chimeneas. Se mueven los muebles.

VII. Toda la gente sale a la calle. Se percibe en los coches en marcha. Comienzan a producirse daños en la estructura de los edificios.

VIII. Alarma general. Muy destructivo en estructuras ligeras. Caen estatuas y muros.

IX. Pánico. Destrucción total de estructuras ligeras y parcial de sólidas. Rotura del terreno y de las conducciones subterráneas.

X. Pánico. Solamente quedan en pie los mejores edificios. Torsión de los raíles.

XI. Pánico. Quedan en pie pocos edificios. Fallas en el terreno.

XII. Destrucción total. Se ven ondulaciones en el terreno. Proyección de objetos y piedras al aire.

La Antártida, donde se encuentra el Polo Sur, es un inmenso territorio que esta casi totalmente cubierto por grandes capas de hielo, con un espesor de 2.000 metros. En la Antártida las condiciones de vida son muy adversas, debido a las bajas temperaturas, por lo que se encuentra deshabitada.

Desde hace algún tiempo son varias las naciones que comparten este territorio para usarlo con fines pacíficos, así son varias las expediciones científicas que cada año se desplazan hasta allí para realizar investigaciones. Concretamente España envió en 1983 su primera expedición, en la cual se consiguieron importantes logros.

En la Antártida, salvo las raras excepciones, no crece ningún tipo de planta. También es escasa la presencia de especies de animales, y sólo hay animales marinos, como focas y ballenas, además hay pingüinos, que soportan el frío debido a que tienen bajo la piel una gruesa capa de grasa.

Al sur del Círculo Polar Antártico se produce un hecho singular: después del solsticio de verano que es el 22 de diciembre, a medida que el sol se acerca al polo, el sol permanece cada vez más tiempo en el cielo, de esta forma hay días que duran semanas y hasta meses.

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados

$$= \cos^2 a\,(1 - \operatorname{sen}^2 b) - \operatorname{sen}^2 b\,(1 - \cos^2 a) =$$

Sustituyo $\cos^2 b$ y $\operatorname{sen}^2 b$ por los valores deducidos de la ecuación fundamental $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$= \cos^2 a - \cancel{\operatorname{sen}^2 b \cos^2 a} - \operatorname{sen}^2 b + \cancel{\operatorname{sen}^2 b \cos^2 a} =$$

Quitando paréntesis. Tras la simplificación nos queda:

$$\cos (a + b) \cos (a - b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

Problema 4

Demostrar la siguiente igualdad:

$$(\cos a + \operatorname{sen} a)^2 = \operatorname{sen} 2a + 1$$

Solución

Hacemos transformaciones sucesivas del primer miembro tratando de llegar al segundo

$$(\cos a + \operatorname{sen} a)^2 = \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a + 2 \cos a \operatorname{sen} a =$$

Aplicando el cuadrado de una suma:

$$= \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen} 2a =$$

Recordando que el seno del ángulo doble es igual a:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

$$= 1 + \operatorname{sen} 2a$$

Aplicando la ecuación fundamental $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Como se ve se ha llegado a la igualdad que intentabamos demostrar al principio, luego:

$$(\cos a + \operatorname{sen} a)^2 = \operatorname{sen} 2a + 1$$

Problema 5

Demostrar la siguiente igualdad:

$$\operatorname{tag} a + \operatorname{tag} b = \operatorname{tag} a \operatorname{tag} b\,(\operatorname{cotag} a + \operatorname{cotg} b)$$

Solución

La igualdad se puede demostrar desarrollando el primer miembro para llegar al segundo o viceversa. En el presente ejercicio partiremos del segundo miembro para intentar llegar al primero.

$$\operatorname{tag} a \operatorname{tag} b\,(\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b) = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b\,\left(\frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{tg} b}\right) =$$

Teniendo en cuenta que la cotangente es la inversa de la tangente.

$$= \text{tag a tag b} \left(\frac{\text{tag b} + \text{tag a}}{\text{tag a tag b}}\right) =$$

Efectuando el quebrado del interior del paréntesis:

$$= \frac{\cancel{(\text{tag a tag b})}\,(\text{tag b} + \text{tag a})}{\cancel{\text{tag a tag b}}}$$

Quitando el paréntesis y simplificando se ha llegado a la expresión de partida.

$$\text{tag a tag b (cotg a + cotg b)} = \text{tag b + tag a}$$

Problema 6

Simplificar la expresión: $\dfrac{1 + \text{tg}^2\, a}{1 + \text{cotg}^2\, a}$

Nadie ha podido jamás contar los instrumentos musicales que se usan en el mundo, debido al gran número de ellos.

De todos los instrumentos musicales los más usados quizás sean el piano y el violin.

El piano nació en 1700 y tuvo antepasados muy célebres: el clavicordio y el claricémbalo.

El primer piano fue construído por el italiano Bartolomé Cristofori. Hacia 1760 el alemán Silberman construyó uno de los más perfectos que se conocen. Los primeros pianos eran de cola, en el siglo XIX aparecieron los verticales. En 1931 nació el piano eléctrico. Las composiciones para este instrumento son numerosas no solo, sino también en orquesta.

El violin apareció durante el siglo XVI como continuación de las violas antiguas.

Entre 1560 y 1660, el violin encontró su solución definitiva con los fabricantes más famosos de aquel tiempo: Gasparo da Saló (Brescia); Antonio Amati (Cremona) y el famoso Stradivarius que construyó unos 450 violines y su valor es incalculable.

Es un satélite natural de nuestro planeta y el cuerpo celeste más cercano a nosotros.

Si hemos observado alguna vez la luna llena aparecen en ella algunas manchas que en realidad son grandes extensiones de lava y cenizas volcánicas solidificadas.

Los colores que aparecen en la superficie lunar, algunos de ellos de hasta un centenar de kilómetros de diametro, son la consecuencia de las violentas erupciones volcánicas del pasado, o la marca dejada por fragmentos celestes que cayeron en la Luna.

Una vez cada 29 días la Luna se encuentra entre la Tierra y el Sol. El Sol ilumina una cara, pero en la Tierra no vemos la parte iluminada, cuando la luna está en esa posición se llama luna nueva. Cuando es la Tierra la que se encuentra entre la Luna y el Sol se ve la parte iluminada de la luna y es el período de luna llena. El paso de la luna llena a la luna nueva se llama cuaro menguante. El paso de la luna nueva a luna llena se llama cuarto creciente.

Solución

Como la tangente es el cociente entre el seno y el coseno y la cotangente, al ser su inversa, es el cociente entre el coseno y el seno, podemos poner la expresión de la siguiente forma:

$$\frac{1 + tg^2\,a}{1 + cotg^2\,a} = \frac{1 + \dfrac{sen^2\,a}{cos^2\,a}}{1 + \dfrac{cos^2\,a}{sen^2\,a}} =$$

Efectuando los quebrados del numerador y denominador nos queda:

$$= \frac{\dfrac{cos^2\,a + sen^2\,a}{cos^2\,a}}{\dfrac{sen^2\,a + cos^2\,a}{sen^2\,a}} = \frac{\dfrac{1}{cos^2\,a}}{\dfrac{1}{sen^2\,a}}$$

Sustituimos $cos^2\,a + sen^2\,a$ por su valor teniendo en cuenta que $cos^2\,a + sen^2\,a = 1$. Efectuando el cociente de quebrados:

$$\frac{1 + tag^2\,a}{1 + cotg^2\,a} = \frac{sen^2\,a}{cos^2\,a} = \qquad tag^2\,a$$

TEMA 30

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS Y OBTUSANGULOS

1.— Dado un ángulo agudo y la hipotenusa.

2.— Dado un cateto y un ángulo agudo.

3.— Dado la hipotenusa y un cateto.

4.— Dado los dos catetos.

5.— Método de la doble observación.

6.— Problemas.

7.— Teorema del seno.

8.— Teorema del coseno.

9.— Teorema de la tangente.

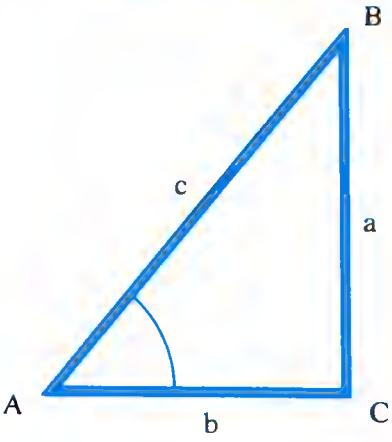
10.— Fórmulas de Briggs.

11.— Problemas.

TEMA 30

Tales de Mileto, sabio griego del siglo VII antes de J.C., nos habla ya del fenómeno de la electricidad consistente en poder de atracción de objetos pequeños como plumas, pajitas, etc., que consigue el ámbar al ser frotado fuertemente. Ya en el siglo XVI se amplió esta propiedad al vidrio, la resina y el azufre. Este descubrimiento fue hecho por el inglés Gilbert. La primera máquina la inventó Otto von Guerieke unos años después. Con el tiempo esta máquina se fue perfeccionando pudiendo citarse las creadas por Winkler la de Ramsden y la de Franklin que al ver el poder de atracción de las puntas creo el pararrayos y estudió la electricidad de las nubes valiéndose de una cometa. Posteriormente la electricidad ha ido aumentando su influencia en la vida del hombre, hasta nuestros días en que no nos podemos imaginar la vida sin ella.

1.— Dado un ángulo agudo y la hipotenusa



Nos dan:

- El lado c (la hipotenusa)
- El ángulo A

Nos piden:

- Los lados b y a
- Los ángulos B y C

Teniendo presente, las igualdades vistas en temas anteriores:

a) En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto.

b) En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente.

Podemos resolver el problema con facilidad.

Como el triángulo es rectángulo, uno de los ángulos tiene que valer 90°, si miramos al dibujo el ángulo que lo cumple es C, por tanto:

$$C = 90^\circ$$

Como, por otro lado, la suma de los ángulos de cualquier triángulo, es 180°, podemos decir:

$$A + B + C = 180^\circ$$

Como A es un dato del ejercicio y C sabemos por el dibujo que vale 90°, tendremos

$$B = 180^\circ - C - A$$

Sustituimos C por su valor:

$$B = 180^\circ - 90 - A$$

$$B = 90 - A$$

Con esto, ya sabemos el valor de los ángulos, para encontrar el valor de los lados, aplicamos las igualdades mirando nuestro dibujo, cumpliéndose que:

$$A = c \cdot \text{sen } A$$
$$b = c \cdot \cos A$$

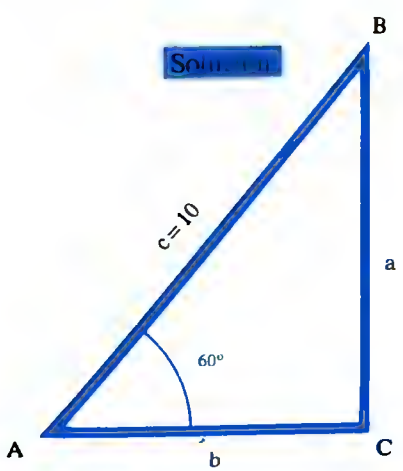
Todo esto, lo resumimos en el siguiente cuadro:

$C = 90^\circ$
$B = 90^\circ - A$
$a = c \cdot \text{sen } A$
$b = c \cdot \cos A$

Ejemplo

Una barra de 10 m de largo está apoyada sobre la pared, formando con el suelo un ángulo de 60°, calcular su proyección con el suelo, el ángulo que forma con la pared y la altura a la que está colocada.

Solución



Ya hemos visto que en la antigüedad los egipcios escribían en una especie de papel extraído del papiro, más tarde se usan hojas rectangulares de pergamino sacadas de la piel de la cabra o el cordero, hasta que en el año 1000 apareció en Europa el papel que trajeron los árabes y que había sido inventado siglos antes por los chinos.

El papel hecho de un material ligero y econíco, hizo posible la invención de la imprenta. El primer libro que apareció impreso fue una biblia en el año 1455.

En otras épocas los libros eran objetos preciosos reservados a escasas personas porque era difícil hacerlos. Sin embargo hoy en día gracias a modernísimas máquinas que permiten imprimir a grandes velocidades, se lanzan al mercado millares de ejemplares de ceda libro, cuanto mayor es la tirada, más bajo es el costo de producción, haciendo más asequible a todos el precio del libro. Existen además bibliotecas públicas adonde se puede ir a leer o llevarse a casa durante unos días el libro que se desee.

CALCULO DE PROBABILIDADES (Mus)

Hemos visto anteriormente, que en los juegos de cartas vale más una jugada cuando el índice de probabilidades es más difícil, o sea, en poker por ejemplo, vale más tener tres cartas iguales (trío) que dos cartas iguales (pareja) porque el índice de probabilidades es más pequeño en el trío que en la pareja. Este es el origen de todos los juegos. A más dificultad de tener cierta jugada, mayor valor tendrá.

Pero también existen excepciones, por ejemplo en el mus. Este entretenidísimo juego que de las tabernas ha pasado a los casinos y a ser uno de los principales juegos de sociedad, tiene sus excepciones como ahora veremos.

Cualquier medianillo jugador de mus, sabe que por ejemplo, hablando de pares valen más que tres reyes, que tres sotas (por ejemplo). Que "duples" de reyes y ases (dobles parejas en poker), valen más que duples de caballos sietes (por ejemplo). Si tenemos en cuenta que en una baraja española existen para jugar al mus OCHO REYES (los treses también son reyes) y OCHO ASES (los doses también son ases) y de la demás cartas (cuatro, cinco, seises...' etc.) sólo existen CUATRO, es más difícil "ligar" dos cuatros y dos sotas que dos reyes y dos ases. Por supuesto que es más difícil ligarlos y normalmente (matemáticamente) deberían de valer más. Pero si esto sucediera, se le habría quitado al juego del mus toda la "gracia" ya que se empieza a jugar desde los envites a grande, siguen con envites a chica, luego a pares y después el juego o no juego.

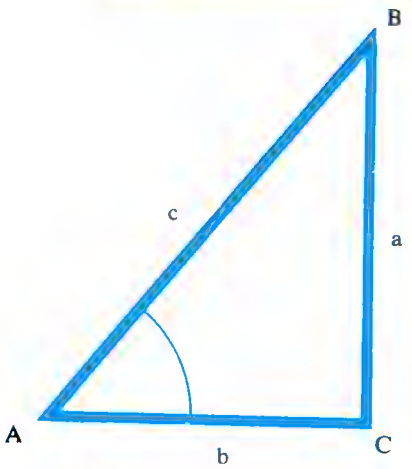
Esta excepción en el cálculo de probebilidades hacen que este juego del mus sea tan fascinante.

$C = 90^\circ \Rightarrow$ $B = 90 - 60 = 30^\circ$; $B = 30^\circ$

- $a = 10 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ$; $a = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$
- $b = 10 \cdot \cos 60^\circ$; $b = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$

$B = 30^\circ$
Altura $= a = 5\sqrt{3}$ m
Proyección $= b = 5$ m

2.— Dado un cateto y un ángulo agudo



Nos dan:

- El lado a (cateto)
- El ángulo A

Nos piden:

- Los lados c y a
- Los ángulos B y C

Como el triángulo es rectángulo, $C = 90^\circ$ por tanto

$$A + B + C = 180^\circ$$
$$B = 180^\circ - C - A$$

Sustituyendo C por su valor:

$$B = 90^\circ - A$$

Para el cálculo de los lados, teniendo presente las igualdades y mirando el dibujo, tendremos:

$$b = c \cdot \cos A \Rightarrow c = \frac{b}{\cos A}$$

Una vez que sabemos el valor del lado c (hipotenusa), el lado a, lo podremos calcular o bien aplicando las igualdades o bien por el teorema de Pitágoras. También se puede aplicar el valor de la tangente, sin necesidad de saber el valor del lado C.

$$a = c \cdot \operatorname{sen} A \qquad \text{o bien,} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

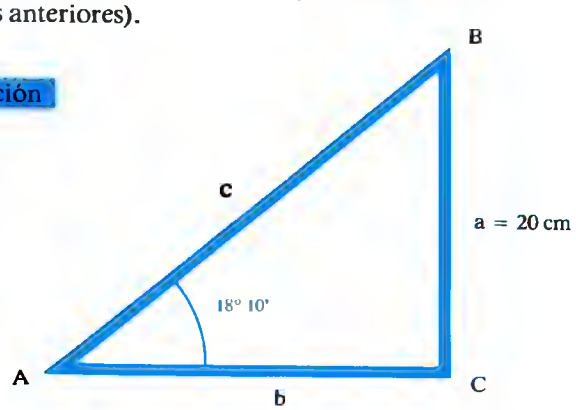
Así pues, tendremos el siguiente cuadro:

$$C = 90^\circ$$
$$B = 90^\circ - A$$
$$c = \frac{b}{\cos A}$$
$$a = c \cdot \operatorname{sen} A \text{ ó bien } a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Ejemplo:

En un triángulo rectángulo a = 20 cm y el ángulo A = 18° 10'. Calcular los restantes elementos. (Las tablas se encuentran en fascículos anteriores).

Solución



- $C = 90^\circ \Rightarrow B = 90 - 18^\circ\,10' = 89^\circ\,60' - 18^\circ\,10' \Rightarrow$

$$B = 71^\circ\,50'$$

- $a = c \cdot \operatorname{sen} 18^\circ\,10'; \quad c = \dfrac{a}{\operatorname{sen} 18^\circ 10'} = \dfrac{20}{0{,}3118} = 64{,}143$

$$c \simeq 64{,}14 \text{ cm};$$

- $b = c \cdot \cos 18^\circ\,10' \Rightarrow b = 64{,}14 \cdot 09502 = 60'945\ldots$

$$b \simeq 60'94 \text{ cm}$$

INDIA.

Son rupestres los más antiguos templos indues. Planta absidal con nave central sostenida por pilares, medias naves y fachada esculpida en la roca. A la pequeña calle cuadrada, solo podian entrar los sacerdotes. En ésta se ubicaba la imagen del dios.

En el siglo XII, los templos de la India se convirtieron en grandes conjuntos cerrado, con puertas monumentales y murallas concéntricas. En el centro de estas murallas se encontraba el santuario propiamente dicho de dimensiones muy reducidas.

En Ceilán, Birmania, Tailandia y Java, se construia el templo de planta cuedrada y techo piramidal, simbolizando la montaña cósmica, reproducida por medio de una pirámide escalonede. Los más bellos templos se encuentran en las más altas montañas. Otras sobre los más bellos paisajes en la cima de una colina natural, o en la cima de una pirámide artificial (Amgkor Bat), sobre la cual se agrupan los santuarios cincundados por fosos, simbolizando el Océano rodeando a la Tierra.

OPERATIVIDAD DEL SISTEMA BINARIO

RESTA

Establezcamos igual que en la suma, una regla,
0−0=0; 1−0=1; 0−1=−1; 1−1=0.

Vamos a operar con la resta con los mismos números que operamos con la suma: el 13 y el 17.

13 − 7 = 6

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ 1\ 6 & 2 \\ 0\ 3 & 2 \\ 1\ 1 & \end{array}$$

$13_{(10)} = 1101_{(2)}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ 1\ 3 & 2 \\ 1\ 1 & \end{array}$$

$7_{(10)} = 111_{(2)}$

Restamos el menor del mayor

$$\begin{array}{r} 1101 \\ -\ 111 \\ \hline 0110 \end{array}$$

O sea el número $110_{(2)}$ tiene que corresponder al número 6 (13−7) del sistema decimal, veamos:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 0\ 3 & 2 \\ 1\ 1 & \end{array}$$

$2^a\ 1^a$

Sigamos con el otro ejercicio 19 y 17.

19 − 17 = 2

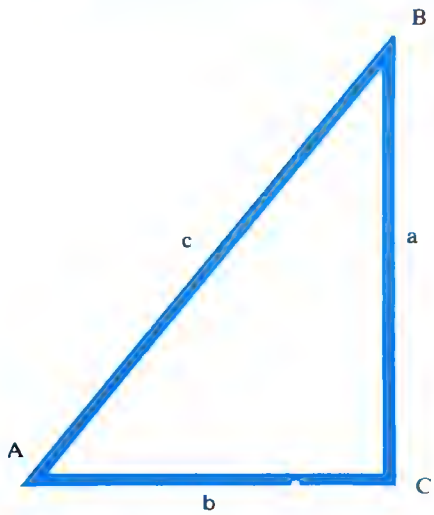
$$\begin{array}{r|l} 19 & 2 \\ 1\ 9 & 2 \\ 1\ 4 & 2 \\ 0\ 2 & 2 \\ 0\ 1 & \end{array}$$

B = 71° 50'

c ≃ 64,14 cm

b ≃ 60'94 cm

3.— [illegible] y un cateto



Nos dan:

- El lado c (hipotenusa)
- El lado a (cateto)

Nos piden:

- El lado b (cateto)
- Los ángulos A, B, C

Al ser el triángulo rectángulo, el otro cateto se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

En cuanto al valor de los ángulos, tenemos:

$$a = c \cdot \operatorname{sen} A \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$$

$$\text{por tanto} \quad A = \operatorname{arc\,sen} \frac{a}{c}$$

$$a = c \cdot \cos B \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{a}{c}$$

por tanto

$$B = \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{c}$$

$C = 90°$, puesto que el triángulo es rectángulo.

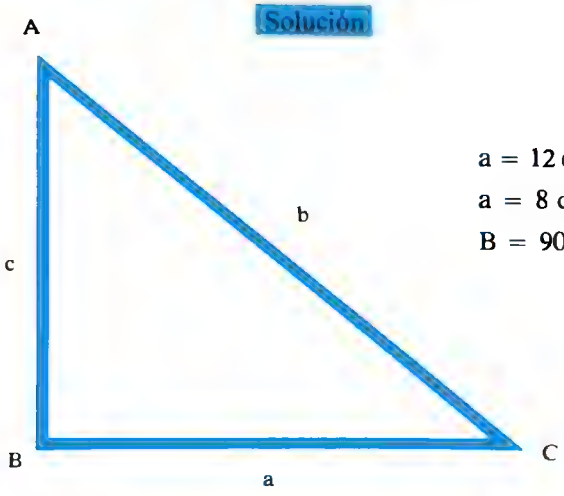
Así pues, el cuadro de valores será:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$C = 90°$$
$$A = \text{arc sen } \frac{a}{c}$$
$$B = \text{arc cos } \frac{a}{c}$$

Ejemplo:

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa vale 12 cm y un cateto mide 8 cm. Calcular los restantes elementos.

Solución



$a = 12$ cm
$a = 8$ cm
$B = 90°$

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} \Rightarrow c = \sqrt{144 - 64};\ c = \sqrt{80}$$

$$c = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \simeq 8'94 \text{ cm}.$$

$c = 8'94$ cm

$$a = b \cdot \text{sen } A \Rightarrow \text{sen } A = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0'6666$$

$A = \text{Arco sen } 0'6666 \leqslant 41° 48'$

$A = 41° 48'$

$10011_{(2)} = 19_{(10)}$

17 | 2
1 8 | 2
0 4 | 2
0 2 | 2
0 1

$10001_{(2)} = 17_{(10)}$

10011
− 10001
00010

Luego el número $10_{(2)}$ tiene que ser igual al número $2_{(1c}$

2 | 2
0 1

2ª 1ª

El otro ejemplo: 39 − 17 = 12

39 | 2
1 19 | 2
1 9 | 2
1 4 | 2
0 2 | 2
0 1

$100111_{(2)} = 39_{(10)}$

27 | 2
1 13 | 2
1 6 | 2
0 3 | 2
1 1

$11011_{(2)} = 27_{(10)}$

RESTEMOS:

100111
− 11011
001100

Tendremos que $1100_{(2)} = 12_{(10)}$

12 | 2
0 6 | 2
0 3 | 2
1 1

Desde los tiempos remotos el hombre empleó para cazar y para defenderse, trozos de piedra que al ser lanzados con fuerza resultaban un arma mortífera, más tarde al organizarse los ejércitos se crearon los cuerpos de honderos, su arma principal era la honda que estaba construída por una tira de cuero, o un trenzado de cáñamo esparto, o cerda. El proyectil podía ser piedras, bolas de arcilla cocida, o de plomo fundido y trozos de hierro con aristas, en el siglo X se le aplicó un mango de madera para aumentar su fuerza de proyección.

Este arma tan rudimentaria llegó hasta el Renacimiento e incluso en la primera guerra mundial había especialistas en lanzar granadas con honda.

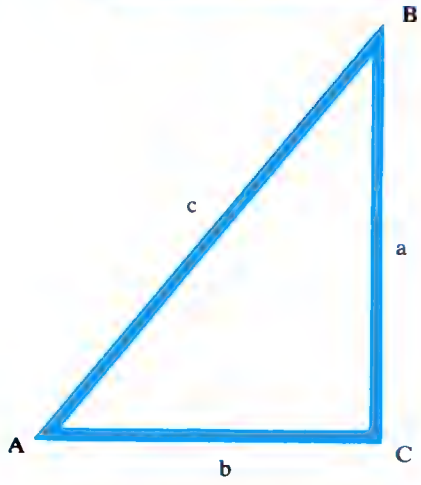
Los más famosos fueron los honderos mallorquines que defendieron las islas contra las invasiones romanas, causaban tales destrozos, que los barcos romanos tuvieron que ser modificados en los materiales empleados en su construcción para defenderse de los certeros impactos de los honderos mallorquines.

$$a = b \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0'6666$$

$$C = \text{arc cos } 0'6666 = 48^\circ\ 12'$$

$$C = 48^\circ\ 12'$$

4.— **Dados los dos catetos**



Nos dan:

- El lado a (cateto)
- El lado b (cateto)

Nos piden

- El lado c (hipotenusa)
- Los ángulos A, B, C.

Al igual que en el caso anterior, la hipotenusa se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para calcular el valor de los ángulos, tenemos:

$$b = c \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b}{c}$$

$$A = \text{arc cos } \frac{b}{c}$$

$$b = c \cdot \text{sen } B \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b}{c}$$

$$B = \text{arc sen } \frac{b}{c} \quad ; \quad C = 90^\circ$$

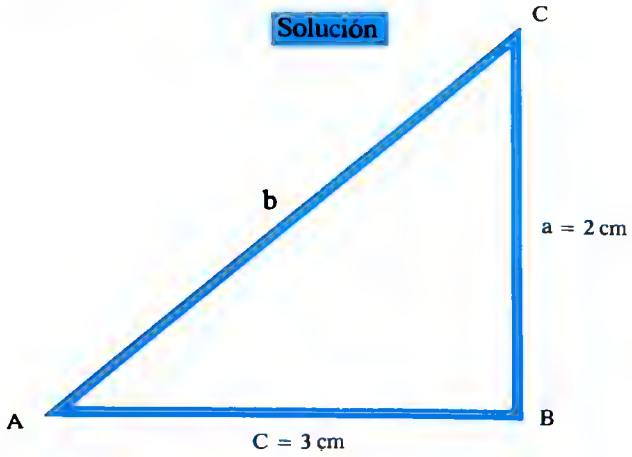
Por tanto el cuadro de valores, será:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$C = 90^\circ$$
$$A = \text{arc cos } \frac{b}{c}$$
$$B = \text{arc sen } \frac{b}{c}$$

Ejemplo

Un triángulo rectángulo tiene 2 cm y 3 cm de longitud sus catetos, encontrar el resto de los elementos.

Solución



$$b = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \simeq 3{,}60$$

$b \simeq 3{,}60$ cm

$B = 90^\circ$

$$c = b \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{c}{b} = \frac{3}{3{,}60} = 0'8333$$

$$A = \text{arc cos } '8333 ,$$

$A = 33^\circ\ 34'$

$$c = b \cdot \text{sen } C \Rightarrow \text{sen} = \frac{c}{b} = \frac{3}{3{,}60} = 0'8333$$

$$C = \text{arc sen } 0'8333 ;$$

$C = 56^\circ\ 26'$

Si la velocidad de la luz es de 300.000 km/s. y la del sonido es de 1.200 kmh^{-1} (ó 333 m/s), es deducible que la primera es más de novecientas mil veces más rápida que la segunda.

Cuando observamos una tormenta, vemos que se producen los clásicos rayos y truenos. Si somos un poco pacientes y observadores, veremos que desde que se produce el reyo (luz), hasta que oímos el trueno, han pasado cierto número de segundos, precisamente esos segundos son al número de kilómetros aproximadamente en que se encuentra la tormenta. Podemos incluso ver si ésta se acerca, se aleja o permanece (esto último poco probabla).

En la aviación, la velocidad de los aviones supersónicos se mide por MARCH. Un march es igual a 1.200 km/h.

Si un avión supersónico vuela a una velocidad de 2.400 km/h., entonces se dice que vuela a una velocidad de March — 2.

Es curioso conocer el hecho de que los musulmanes cuentan los años a partir de la Hégira palabra que significa migración, recuerda la fuga de Mahoma de la Meca a Medina en el año 622 para huir de sus enemigos.

De todas formas para los curiosos, existe una manera da hacer la equivalencia entre al año musulmán y el cristiano.

Cogemos el año musulmán, lo dividimos por 33, restamos el cociente del dividendo y al resto le sumamos 622.

Asi el año musulmán 1.404 vamos a ver a que año cristiano corresponde.

$$\begin{array}{r|l} 1.404 & 33 \\ 084 & 42 \\ 18 & \end{array}$$

Al dividendo 1.404 le restamos el cociente

$$1404 - 42 = 1.362$$

Al resto le sumamos 622

$$1.362 + 622 = 1.984$$

Nos da nuestro año actual.

Por lo tanto mientras que nosotros vivimos en el año 1.984, los musulmanes viven en el año 1.404.

5.— Método de doble observación

Hay casos en los que nos piden encontrar la altura y no nos dan la base como dato, por tanto para resolver esto se necesita el método de la doble observación.

Ejemplo

Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una estatua formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos a la estatua 37'5 m, este ángulo se hace de 60°. ¿Qué altura tendrá la estatua?

Solución

Nos dan

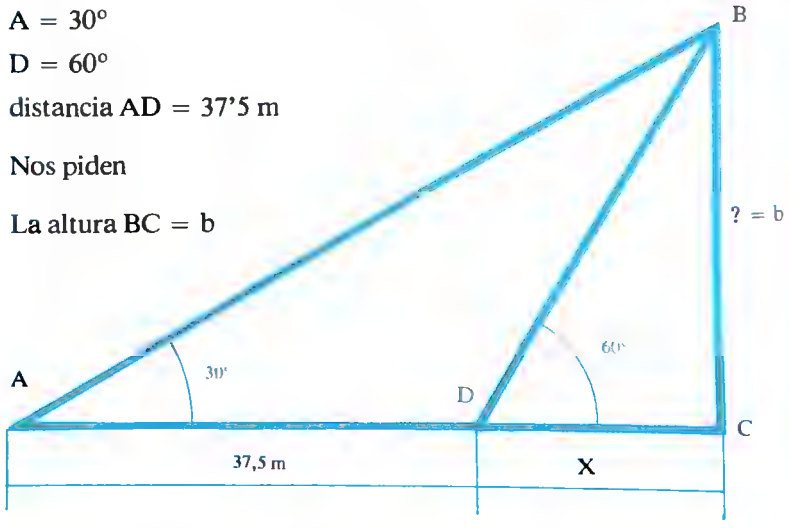
A = 30°

D = 60°

distancia AD = 37'5 m

Nos piden

La altura BC = b



teniendo en cuenta que la tangente de un ángulo, es igual al cociente entre el lado opuesto y el adyacente, tendremos:

$$\text{tg } 30 = \frac{h}{37'5 + x}$$

$$\text{tg } 60 = \frac{h}{x}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{37'5 + x} \Rightarrow h = \frac{(37'5 + x)\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \sqrt{3}$$

Por el método de igualación, tenemos:

$$x \cdot \sqrt{3} = \frac{(37'5 + x)\sqrt{3}}{3}$$

lo que multiplica a la incógnita pasa al otro lado dividiendo, por tanto:

$$x = \frac{(37'5 + x) \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 3}$$

$\sqrt{3}$ que multiplica y $\sqrt{3}$ qe divide se van, quedando:

$$x = \frac{37'5 + x}{3}$$

Operando, tenemos:

$3x = 37'5 + x \; ; \; 2x = 37'5$

$$x = \frac{37'5}{2} = 18'75 \text{ m}$$

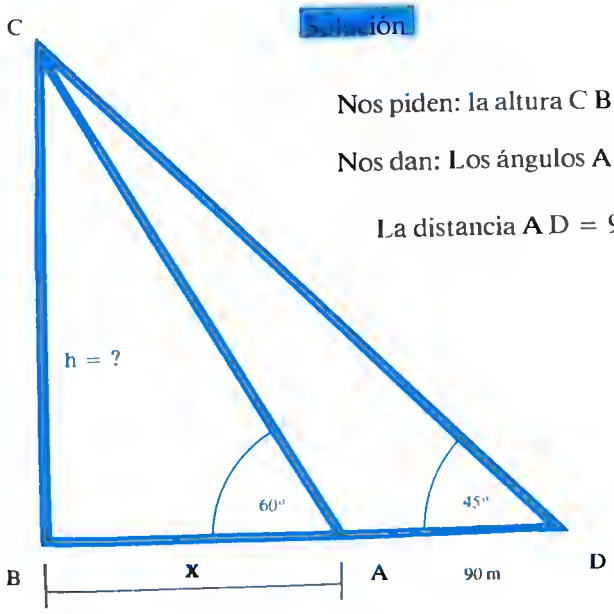
Pero el ejercicio, nos pide la altura de la estatua (h). Como sabemos que:

$$h = \sqrt{3} \cdot x \Rightarrow \quad h = \sqrt{3} \cdot 18'75 = 32'47 \text{ m}$$

$h = 32{,}47$ m

Ejemplo

Desde un punto A, se ve la luz de una farola bajo un ángulo de 60°. Si nos alejamos 90 m de la farola, la luz se ve bajo un ángulo de 45°. Calcular la altura de la farola.



Solución

Nos piden: la altura C B = h

Nos dan: Los ángulos A y D

La distancia A D = 90 m

Como hemos visto anteriormente es fácil pasar del año musulmán al año cristiano pero en realidad lo que nosotros conocemos es el año cristiano y no el año musulmán.

Vamos a dar a continuación unos planteamientos matemáticos fecilmente comprendibles, basados en la regla anterior, y que nos permiten a través del conocimiento del año cristiano, conocer el año musulmán.

Llamamos:

A.M. = año musulmán
A.C. = año cristiano
C = cociente

Tenemos:

$A.M - C = AC - 622$ (1)

Por otro lado sabemos:

$$\frac{AM}{33} = C \quad (2)$$

Despejando C en la ecuación (1) y sustituyendola en (2).

$$\frac{A.C}{33} = A.M - A.C + 622$$

Sacando denominadores:

$A.M = 33\ A.M - 33\ A.C + 622.33$

de donde despejando:

$$\frac{33.AC - 20526}{32} = A.M$$

Así pues, tenemos una regla para poder pasar de un año cristiano a un año musulmán.

Vamos a ver, por ejemplo a que año musulmán correspondera el año 2000 de la era cristiana.

$$\frac{50.200 - 20526}{32} = 1421$$

indicando la regla anterior, corresponderia al año 1.421.

Por tanto es un problema que se tiene que hacer por el método de la doble observación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 60^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \\ \text{tg } 45^{\circ} = \dfrac{h}{x+90} \end{array}\right\}$$ Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Sustituimos por sus valores

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{3} = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = \sqrt{3}\cdot x \\ \\ 1 = \dfrac{h}{x+90} \Rightarrow h = x + 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{por igualación}$$

$$\sqrt{3}x = x + 90; \quad 1'732\,x - x = 90$$

$$0'732\,x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{0'732} \quad 122{,}95 \text{ m}$$

Por tanto, como:

$$h = \sqrt{3}\cdot x \Rightarrow h = 1'732 \cdot 122{,}95$$

$$h = 212{,}95 \text{ m}$$

6.— PROBLEMAS. SOLUCIONES

PROBLEMA 1

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 30 cm. y uno de sus catetos mide 24 cm, resolver el triángulo.

Solución

Nos dan:	Nos piden
La hipotenusa a = 30 m.	El lado c
Un cateto b = 24 cm	Los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$

Calcular la penúltima cifra de la potencia de un número.

Anteriormente hemos visto el cálculo de la última cifra de la potencia de un número. Ahora, vamos a intentar (rizar el rizo) calcular también la penúltima cifra de ésta potencia.

Usemos el mismo número TRES como base de cálculo

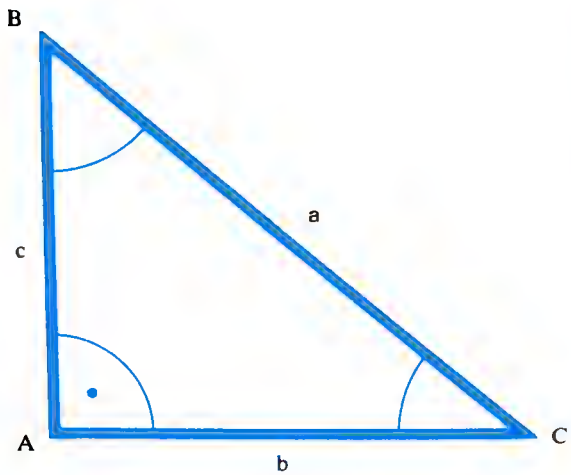
$3^0 = 1$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$
$3^5 = 243$
$3^6 = 729$
$3^7 = 2.187$
$3_8 = 6.561$
$3^9 = 19.683$
$3^{10} = 59.049$
$3^{11} = 177.147$
$3^{12} = 531.441$
$3^{13} = 1.594.323$
$3^{14} = 4.782.969$
$3^{15} = 14{:}348.907$
$3^{16} = 43.046.721$
$3^{17} = 129.140.163$
$3^{18} = 387.420.489$
$3^{19} = 1.162.261.467$
$3^{20} = 3.486.784.401$
$3^{21} = 10.460.353.203$
$3^{22} = 31.381.059.609$
$3^{23} = 94.143.178.827$
$3^{24} = 282.429.536.481$
$3^{25} =$ ---------- 43
$3^{26} =$ ---------- 29
$3^{27} =$ ---------- 87
$3^{26} =$ ---------- 61

El ciclo para la repetición de la *última* cifra se cumple cada *cuatro veces* y el ciclo para la repetición de la última y de la penúltima cifra se cumple cada *VEINTE VECES*.

Sí para cálcular la última cifra de un número elevado a una potencia, teniamos que dividir la potencia por *cuatro,* ahora para sacar los dos últimos números tendremos que dividir por VEINTE.

Pongamos el mismo número del ejemplo anterior, o sea 3^{1234}.

Dividimos 1.234 entre veinte y nos dá sesenta más CATORCE de resto, o sea que las dos últimas cifras son las mismas que el 3^{14}, o lo que es lo mismo, termina en 69.



Por el teorema de Pitágoras podemos calcularnos fácilmente el lado c, que es uno de los catetos de nuestro triángulo rectángulo:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324}$$

$$c = 18 \text{ cm.}$$

Por otro lado:

$$\cos C = \frac{b}{a} = \frac{24}{30} = 0'8$$

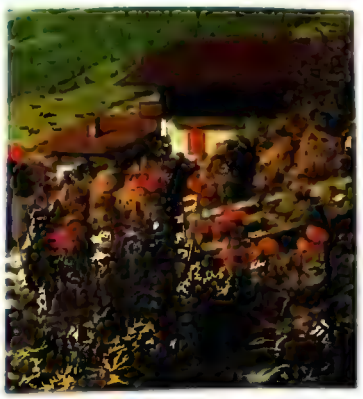
$$C = \text{arc cos } 0'8 = 36^\circ\ 52'$$

$$C = 36^\circ\ 52'$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \frac{24}{30} = 0'8$$

$$B = \text{arc sen } 0'8 = 53^\circ\ 8'$$

$$B = 53^\circ\ 8'$$

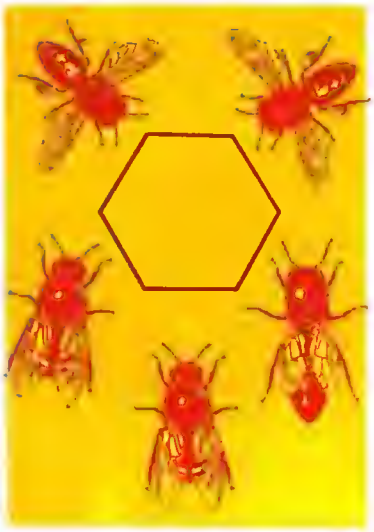


Son importantes los efectos que desempeña la "luz" en la naturaleza. Además de los efectos naturales y los beneficios que sabemos que nos proporciona, vamos a ver otras curiosidades de los estímulos luminosos.

Vemos como las flores y las hojas suben hacia la luz queriendo llegar a ella. Los animales también son atraídos por ella. Los pescadores llevan como arma principal un gran foco que atrae a los peces. Las mariposas acuden a la luz como encandiladas por ella.

Tanto es el poder de la luz, que hasta los humanos nos vemos atrapados por los efectos de la misma. Si vamos paseando por la calle, nos paramos en un escaparate que tenga mucha luz aunque no nos interesen sus productos, y sin embargo en el escaparate de al lado no nos detenemos ya que está pobre de iluminación.

Todo esto da pie y demuestra que la publicidad más económica es la luz.



Las abejas viven en grandes colonias llamadas colmenas, en cada una de las cuales habita una denominada reina cuya función principal es poner continuamente huevos. También hay zánganos, que sólo sirven para fecundar a la reina, así cada macho fecunda una sola vaz, y luego, como carecen de utilidad, es atrapado y muerto.

Todos los trabajos necesarios para la vida de la colmena son efectuados por las abejas obreras, que van cambiando de oficio a medida que transcurre el tiempo. Al poco tiempo la larva se transforma en insecto, la abeja se pone entonces a trabajar, limpiando las celdillas vacías y sobre todo para alimentar a las demás larvas. Transcurridos unos días su función será la de construir celdillas donde la reina habrá de poner sus huevos.

Estos animalitos fabricantes de miel y cera están dotados de una inteligencia (según el matemático APPUS) inigualabla, ya que saben al construir su panal, que el hexágono es mayor qua el cuadrado y este a su vez mayor que el triángulo y con el mismo material que tendrían que amplear en la construcción de cada figura, el hexágono es el que puede contener más miel. Nosotros, que pretendemos tener más inteligencia que las abejas, vemos que todas las figuras planas con lados y ángulos iguales y con igual perímetro, son mayores que las tienen más angulos y por tanto la que tendría mayor número de ángulos sería ... *el círculo.*

PROBLEMA 2

De un triángulo rectángulo conocemos uno de sus ángulos que mide 35° y un cateto que es igual a 72 m. Calcular la medida de la hipotenusa y del otro cateto.

Solución

Nos dan	Nos piden
El ángulo C = 35°	La hipotenusa a
El cateto b = 72 m	El cateto c
	El ángulo B

$c = b \cdot \text{tag } C$

$c = 72 \cdot \text{tag } 35°$

$c = 72 \cdot 0'7002$

$c = 50{,}4144 \text{m}$

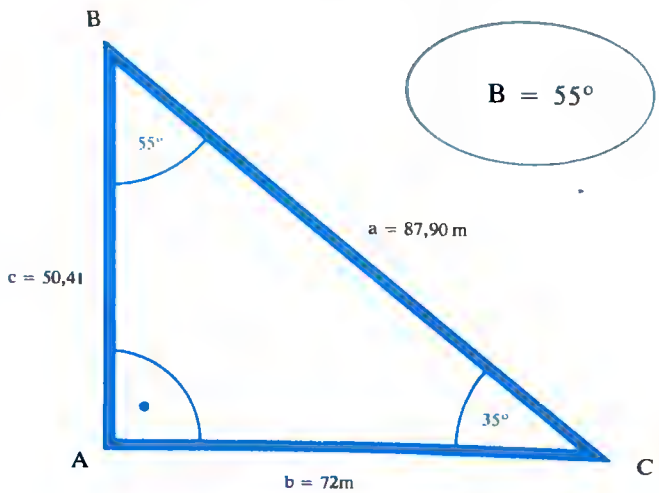
$$a = \frac{b}{\cos C} = \frac{72}{\cos 35°}$$

$$a = \frac{72}{0'8191}$$

$a = 87.90$ m

Como los ángulos de un triángulo siempre suman 180° el ángulo B será

$$180° = 90° + B + C = 90° + 35° + B$$

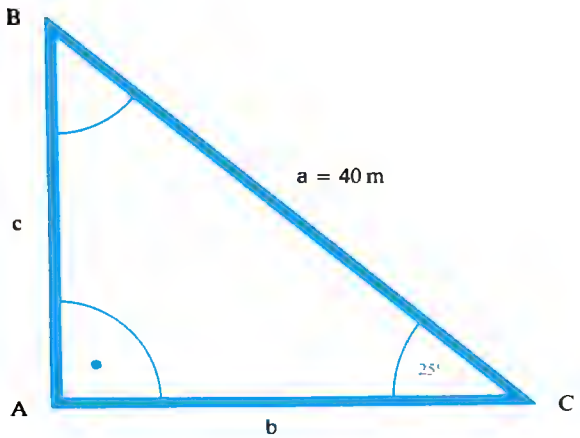


PROBLEMA 3

Supongamos que conocemos en un triángulo su hipotenusa que mide 40 m., y el ángulo que dicha hipotenusa forma con el eje 0X, que es igual a 25°. Solucionar el triángulo.

Solución

Nos dan	Nos piden
El ángulo C = 25°	Los dos catetos b y c
La hipotenusa a = 40 m	El ángulo B



El calculo del tercer ángulo no presenta ningún problema puesto que, como los ángulos de un triángulo suman 180°:

$$B = 90° - C$$

$$B = 90° - 25°$$

$$B = 65°$$

$$b = a \cdot \cos C$$

$$b = a \cdot \cos 25°$$

$$b = 40 \cdot 0{,}9063$$

$$b = 36{,}25 \text{ m}$$

$$c = a \cdot \operatorname{sen} C$$

$$c = a \cdot \operatorname{sen} 25°$$

$$c = 40 \cdot 0{,}4226$$

$$c = 16{,}9 \text{ m}$$

Dos amigos se encontraban en el café. La conversación entre ellos era nula. Dos taciturnos; uno de ellos, un consumado jugador casi arruinado, capaz de jugarse todo, apostar por todo, en fin, lo que podríamos llamar un loco por el juego. El otro, un matemático con otra locura, los números; pero además, un pertinaz avaro capaz de no hablar con tal de no gastar... la lengua.

Este último rompiendo el silencio le dice al jugador.

— ¿Tu sabes que mil es igual a mil cuarenta y nueve?

— ¿Me crees idiota? ¡Cómo van a ser iguales mil y mil cuarenta y nueve!

— Muy fácil, mira:

MIL = MIL

— Uno se lee como mil y el otro como número romano, o sea mil cuarenta y nueve.

— Me parece muy bien. Entonces tu serías capaz de darme mil cuarenta y nueve pesetas y yo te doy mil ¿vale?

— ¡Claro que vale! Dame mil pesetas. Yo te doy a ti mil cuarenta y nueve pesetas... pero en un talón (cheque bancario).

— Sí, te lo acepto porque se que tienes dinero en el banco, pero yo no tengo ni siquiera una cuenta bancaria donde ingresarlo.

— No te preocupes, te lo pongo al portador, te acercas a cobrarlo y te ganas cuarenta y nueve pesetas... según tú.

Llegaron a un acuerdo y al ver el talón o cheque, el otro dijo:

— ¡Pero este banco está al otro extremo de la ciudad! Para ir allí tengo que hacerlo en autobús que me cuesta 70 pts. ida y vuelta, luego ¡pierdo dinero! Pierdo 21 pts.

— Sí, pero tú has sido un perdedor, ya que no te creías que mil era igual a mil cuarenta y nueve y ahora resulta que mil es igual a mil setenta.

2 = 3

En las páginas 281 y 282, realizamos la demostración de 1 = 2 ?

Aquí vamos a demostrar que 2 es igual a 3.

Partimos de una igualdad incuestionable:

$$2 = 2$$

Vamos a multiplicar por un mismo número, el 3

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \quad \text{luego } 6 = 6$$

Vamos a multiplicar por — 1.

$$-6 = -6$$

Vamos a cambiar esta igual- por otra *igualdad convencional*.

$$4 - 10 = 9 - 15$$

Vamos a restar a esta igualdad un mismo número, $6 + \frac{1}{4}$ y tendremos.

$$4 - 10 + 6 + \frac{1}{4} = 9 - 15 + 6 + \frac{1}{4}$$

Pero en estas dos igualdades tenemos que: $4 = 2^2$, $10 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2}$; $6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} = \frac{5^2}{2^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$: esto en el primer término y en el segundo término nos ocurre poco más o menos, veamos:

$9 = 3^2$; $15 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2}$ y $6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} = \frac{5^2}{2^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

PROBLEMA 4

Conociendo de un triángulo rectángulo sus catetos que valen respectivamente 10,8 metros. Calcular la hipotenusa y los otros dos ángulos del triángulo.

Solucion

Nos dan

Los catetos

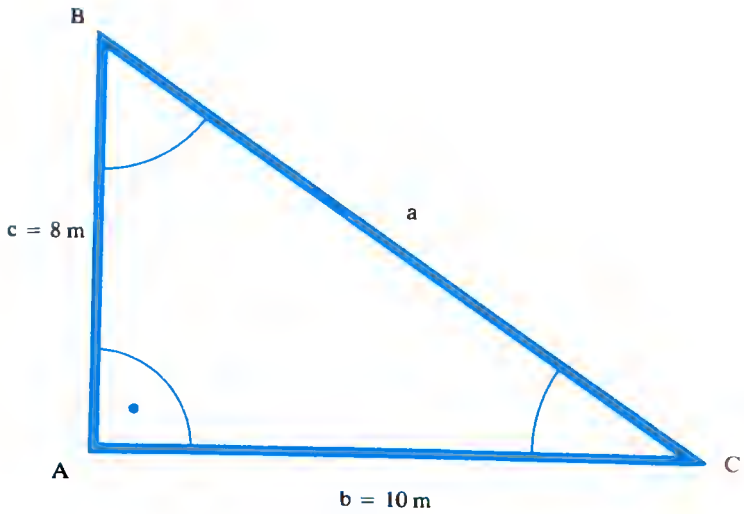
b = 10 m

c = 8 m

Nos piden

La hipotenusa a

Los ángulos B y C



Mediante Pitágoras calculamos la hipotenusa

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}$$

a = 12'8 m

$$\text{tag } B = \frac{b}{c} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

$B = \text{arc tag } 1{,}25 \simeq 51° 30'$

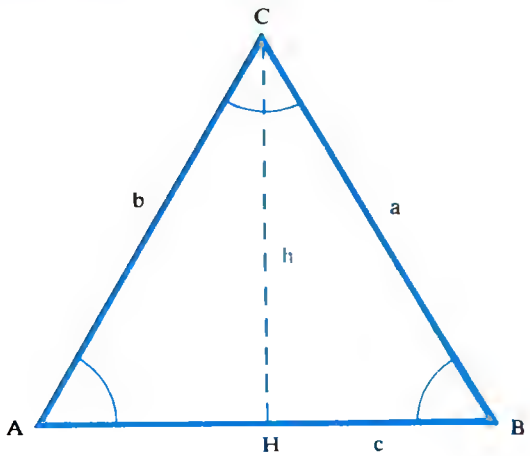
b ≃ 51° 30'

$C = 90° - B \simeq 90 - 51° 30'$

C ≃ 38° 30'

7.— TEOREMA DEL SENO

Supongamos un triángulo oblicuángulo, como el de la figura, de vértices A B C y lados a, b y c. Trazamos su altura "h" que coincidirá con el segmento C H, el triángulo oblicuángulo habrá quedado dividido en dos triángulos rectángulos, por un lado A C H y por otro B C H.



En el triángulo se verifica:

$$h = a \text{ sen } B$$

$$h = b \cdot \text{sen } A$$

Si los primeros miembros de las dos ecuaciones son iguales, los segundos miembros tiene también que igualarse, luego:

$$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A$$

Expresión que puede expresarse como:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

Cambiando las letras para referirlo al ángulo C nos quedaría:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } c} = \text{cte}$$

Estas razones serán igual a un número constante, por lo que podemos afirmar que en cualquier triángulo, la razón de un lado al seno del ángulo opuesto al mismo es constante.

El teorema del seno se enuncia de la siguiente manera:

"El valor constante de la razón de un lado al seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo".

Bien, sustituyamos entonces:

$$2^2 - 2 \cdot 2\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot$$

$$\cdot 3\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \rightarrow$$

Pero ¿qué vemos en estas igualdades?, quecada una de ellas es diferencia de cuadrados (recordemos, cuadrado del primero, menos doble producto del primero, por el segundo, más el cuadrado del segundo. Sustituyendo tendremos:

$$\left[2 - \frac{5}{2}\right]^2 = \left[3 - \frac{5}{2}\right]^2$$

Si sacamos la raíz cuadrada de ambos miembros.

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

Sumamos a cada uno de ellos,

$$\frac{5}{2}$$

tendremos:

$$2 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$

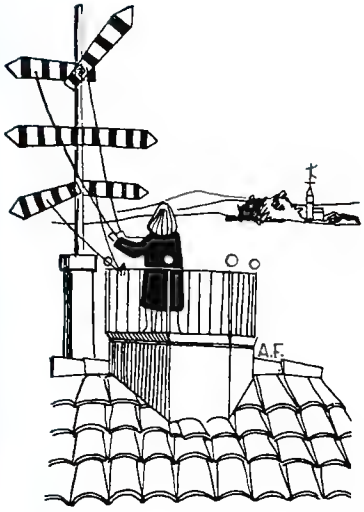
De donde $2 = 3$

¿En quá consiste la trampe?

Recordemos que aunque los cuadrados de dos números, sean del signo que sean, siempre es el mismo número no tienen por quá ser iguales estos dos números. $(-5)^2 = 5^2$.

Pero, -5 no puede ser igual a 5.

Ahí está la trampa.



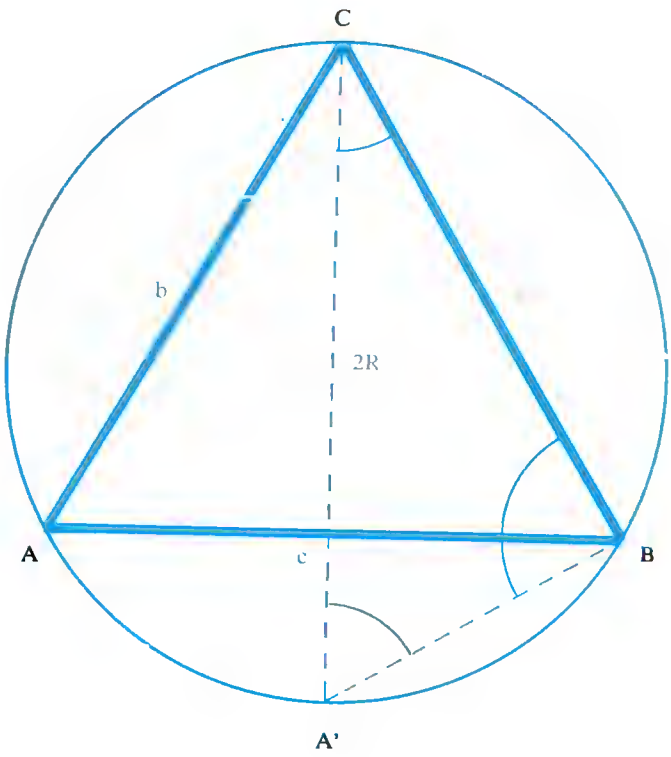
A principios de este siglo, el hombre tenia la necesidad de comunicarse a largas distancias mediante algún aparato que no utilizase cables, uno eran el teléfono y el telegrafo. Esta necesidad fue cubierta con la aparición de un nuevo aparato que, al pasar la corriente electrica, emitia ondas electromagneticas capaz de transportar los impulsos del telegrafo. A este aparato se le llamó radiotelegrafo. Fué Guillermo Marconi el primero en utilizar el radiotelegrafo. Con este aparato se pudierón mandar innumerables mensajes de socorro de barcos que se encontraban en peligro.

Unos años mas tarde el radiotelegrafo se perfeccionó llegando, incluso, a poderse transmitir no solo señales sino también la musica y la voz humana. De esta forma nació la radio. La primera emisora de radio con una difusión regular se fundo en los Estados Unidos en 1.920. En la actualidad, la radio es uno de los medios de comunicación mas importantes y con mas auge.

Se puede decir, que este medio de comunicación es el que mas en contacto está con la gente, y a su vez es él mas rápido en ofrecer las noticias ocurridas.

Así, también, la radio es utilizada para dar mensajes de socorro en caso de desapariciones ó de grandes catastrofes.

Realizando el dibujo tendríamos un triángulo A B C y su circunferencia circunscrita y sus lados a, b y c. Trazamos a partir de cualquiera de los vértices el diámetro de la circunferencia "A' B" que será igual a 2 R, unimos A' con el vértice B y aplicando el teorema expresado anteriormente, tenemos que:



Por abarcar A y A' el mismo arco de la circunferencia circunscrita tienen que ser iguales, luego

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{a}{\text{sen } A'}$$

y aplicando la ley del seno en el triángulo A' B C, tendremos:

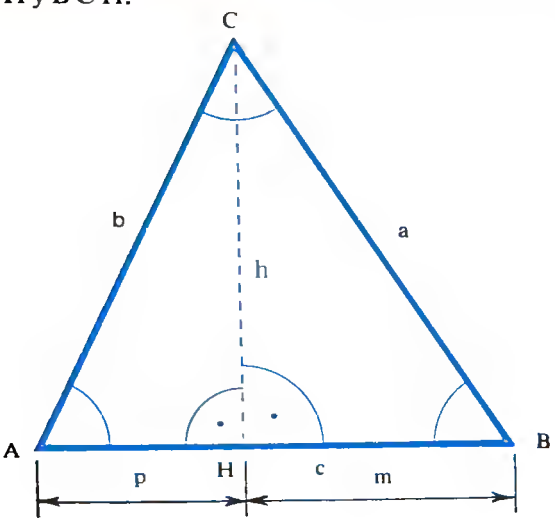
$$\frac{a}{\text{sen } A'} = \frac{2\,R}{\text{sen } 90^\circ}$$

puesto que el ángulo A' B C tiene que ser recto ya que es inscrito y abarca la mitad de la circunferencia. Por otro lado como el sen $90^\circ = 1$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = 2\,R$$

8.— TEOREMA DEL COSENO:

Supongamos un triángulo oblicuángulo como el representado por la figura de vértices A B C y lados a, b y c. Dibujemos la altura, C H, de esta manera obtendremos dos triángulos rectángulos A C H y B C H.



Se cumple: En el triángulo B C H

$$a^2 = h^2 + m^2 \qquad (1)$$

En el triángulo A C H

$$h^2 = b^2 - p^2 \qquad (2)$$

Como el segmento "c" es la suma (m + p), podemos poner:

$$m = c - p$$

luego

$$m^2 = (c - p)^2 = c^2 + p^2 - 2cp \qquad (3)$$

En la expresión (1) sustituimos los valores de h^2 y m^2 obtenidos en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente, con lo que tendremos.

$$a^2 = b^2 - p^2 + c^2 + p^2 - 2cp$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$$

Como:

$$p = b \cdot \cos A$$

la fórmula quedará:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

La antigua Persia es lo que hoy conocemos como Iran.

En tiempos antiguos, esta región fue invadida por innumerables tribus de origen indoeuropeo y que procedian de Asia central. Alejandro Magno la conquistó en el año 331 a.C. A la muerte de éste, fue gobernada por Selemo y posteriormente fue dominada por los partos.

La parte septentrional del país, con un relieve montañoso y un clima desértico, estaba habitada por los medos, mientras en los fértiles valles meridionales se establecieron los persas.

En la Persia del siglo VII a.C, un profeta llamado Zoroastro rechazó las antiguas creencias, creando una nueva religión, basada en las ideas de humanidad y justicia y rechazó de la crueldad. Según esta nueva religión, el hombre, inspirado por el dios creador Ormuz, el Señor Sabio, intenta hallar la verdad, pero es libre de elegir entre el Bien y el Mal, las dos formas que se enfrentan eternamente. Si el hombre, en su dura lucha contra el Mal, cuida de su cuerpo y su alma, el juicio final tras la historia del mundo le proporcionará un lugar entre los salvados y los justos.

El símbolo de Ormuz era el fuego, que siempre se mantenía encendido en edificios cuadrados en forma de Torre.

Solución al problema del etropello de la pág. 871

Es bien fácil, se necesita menos de un minuto para calcularlo. Vamos a ir por pasos.

1° Matricule de Madrid.

2° Al sumar cada pareja de números de 13, es notorio que los únicos números que pueden sumar trece y empezando por orden inverson son 9, 8, 7, 6, 5 y 4. Al ser el primero número de la matricula de ellos es evidente qua es el número 4. El siguiente, por tanto tiene que ser 9 para que los dos sumen 13.

Ya tenemos M-49.

3°Los dos del centro eran consecutivos y por orden, no pueden, por tanto, ser otros que 6 y 7

Ya tenemos M-4967

4° Solo quedan 8 y 5 y el ser también por orden creciente, por tanto 5 y 8

Y ya tenemos la solución:

M-496758

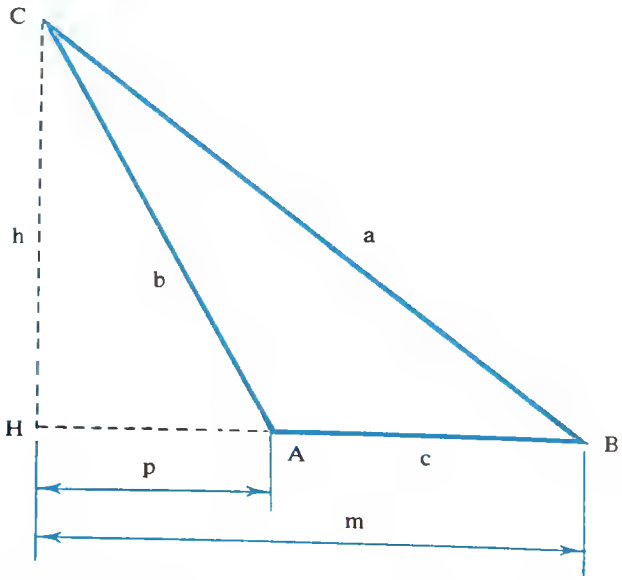
Permutando las letras podríamos obtener una ecuación para cada uno de los lados del triángulo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Analizaremos ahora el caso, en el cual el triángulo está colocado de tal forma que la altura queda fuera del mismo. tal y como indica la figura.



En este caso los triángulos rectángulos que se forman son C H A y C H B, en los cuales se verifica:

En C H B

$$a^2 = h^2 + m^2 \qquad (4)$$

En C H A

$$h^2 = b^2 - p^2 \qquad (5)$$

Como el segmento "m" es igual a(p + c) tendremos:

$$m = p + c$$

$$m^2 = (p + c)^2 = p^2 + c^2 + 2pc \qquad (6)$$

Sustituyendo en le ecuación (4) los valores de h^2 y m^2 obtenidos en las ecuaciones (5) y (6) respectivamente, tendremos:

$$a^2 = b^2 - p^2 + p^2 + c^2 + 2pc$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2pc$$

Como:

$$p = b \cos (180 - A) = - b \cos A$$

tendremos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Realizando, como en el caso anterior, la permuta de las letras tendremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cos C$$

Esto es lo que se denomina "Ley del coseno" que se puede enunciar diciendo:

> "El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman".

De la ley del coseno podemos deducir una serie de fórmulas, que posteriormente emplearemos en la resolución de triángulos oblicuángulos y que nos permiten calcular directamente el coseno de los ángulos de cualquier triángulo despejándolo, simplemente, de las expresiones anteriores.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

CHINA.

Son generalmente edificados en lugares pintorescos. Un gran pabellón de forma rectangular flanqueado por dos torres y alrededor varios edificios dispuestos en el interior de una muralla y reunidos sobre el mismo basamento. Principalmente eran construcciones de madera de cubierta solediza con fuerte inclinación e incurvada hacía arriba descansando sobre columnas. La cubierta estaba revestida de tejas esmaltadas, armonizando con el rojo vivo de las columnas o con el blanco del marmol de las terrazas. Los templos estaban precedidos de pórticos bien de madera o de piedra.

Los templos japoneses, aunque de la misma idea, eran mucho más simples y no tan suntuosos. La forma era cuadrada en vez de rectángular, en vez de dos torres tenía una columna central, construcción en madera y la cubierta fabricada con corteza de arbol.

Los vietnamitas, unas veces usaban la forma cuadrada otras la rectángular, suprimiendo las torres y las columnas.

El santuario chino más importante es el Templo del Cielo, en Pekin. Un edificio cuyas puertas coinciden con los cuatro puntos cardinales. Construido en 1420 y restaurado en 1.751. A lo largo de un eje longitudinal se distribuyen un altar de forma redonda, tres plataformas concéntricas, y un templo que conservaba la tablilla del cielo.

OPERATIVIDAD DEL SISTEMA BINARIO

MULTIPLICACION

Regla:

$1 \times 0 = 0; 0 \times 1 = 0; 1 \times 1 = 1$
$0 \times 0 = 0$

Seguiremos usando los mismos números anteriores

$13 \times 7 = 91$

$13_{(10)} = 1101_{(2)}$

$7_{(10)} = 111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ 111 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 1101 \\ \hline 1011011 \end{array}$$

El número $1011011_{(2)}$ tiene que ser forzosamente el $91_{(10)}$. Veamos:

$$\begin{array}{r|l} 91 & 2 \\ 11 & 45 \quad 2 \\ 1 & 05 \quad 22 \quad 2 \\ & 1 \quad 02 \quad 11 \quad 2 \\ & \quad 0 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \\ & \quad\quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ & \quad\quad\quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$7^a\ 6^a\ 5^a\ 4^a\ 3^a\ 2^a\ 1^a$

$1011011_{(2)} = 91_{(10)}$

Otro ejercicio

$19 \times 17 = 323$

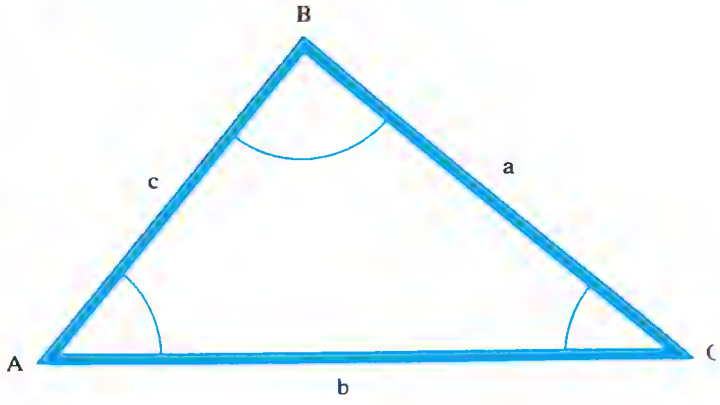
$19_{(10)} = 10011_{(2)}$

$17_{(10)} = 10001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ \times\ 10001 \\ \hline 10011 \\ 10011 \\ \hline 101000011 \end{array}$$

9.— TEOREMA DE LA TANGENTE

Si recordamos el teorema del seno:



$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

Aplicando las propiedades de las proporciones que nos dicen que podemos obtener otras fracciones equivalentes, bien sumando los antecedentes y consecuentes, bien restándolos, tenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a+b}{\text{sen } A + \text{sen } B} = \frac{a-b}{\text{sen } A - \text{sen } B}$$

De las dos últimas proporciones se deduce por tanto:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B}$$

Transformamos ahora la suma y la resta de senos en productos

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \text{ sen } \frac{A-B}{2}} \qquad \text{(I)}$$

Como:

$$\frac{\text{sen } \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} = \text{tag } \frac{A+B}{2}$$

$$\frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\text{sen } \frac{A-B}{2}} = \text{cotg } \frac{A-B}{2} = \frac{1}{\text{tg } \frac{A-B}{2}}$$

La fórmula (1), quedará simplificad de la siguiente manera.

$$\frac{a + b}{a - b} = \text{tag}\ \frac{A + B}{2} \cdot \cot\ \frac{A - B}{2}$$

O también:

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\text{tag}\ \frac{A + B}{2}}{\text{tag}\ \frac{A - B}{2}}$$

Por tanto la fórmula de la tangente nos dice que:

"En un triángulo cualquiera, la suma de dos lados, partida por la diferencia de esos mismos lados, es igual a la tangente de la semisuma de sus ángulos opuestos, partido por la tangente de la semidiferencia"

La fórmula anterior está dada para los lados "a y b", de igual forma se puede decir para los lados "b y c" y para los lados "a y c".

Para los lados "b y c"

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{\text{tg}\ \frac{B + C}{2}}{\text{tg}\ \frac{B - C}{2}}$$

Para los lados "a y c"

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{\text{tg}\ \frac{A + C}{2}}{\text{tg}\ \frac{A - C}{2}}$$

10.— FORMULAS DE BRIGGS

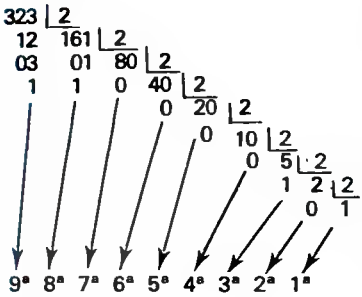
El teorema del coseno dice:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\ A$$

Si despejamos cos A, tendremos:

$$\cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (11)$$

El número 101000011 tiene que ser forzosamente el $323_{(10)}$. Veámoslo:



Ejercicio siguiente:

$39 \times 27 = 1053$

$39_{(10)} = 100111_{(2)}$

$27_{(10)} = 11011$

$$\begin{array}{r} 100111 \\ \times\ 11011 \\ \hline 100111 \\ 100111 \\ 100111 \\ 100111 \\ \hline 10000011101 \end{array}$$

Así pues:

$1.053_{(10)} = 10000011101$

NOTA: Al efectuar esta suma pensemos que uno más uno es cero (unidad de segundo ordan) y nos llevamos una. Pero, al sumar una más una es cero, más una, es una y más una vuelve a ser cero pero nos llevamos DOS, que ya nos empieza a suceder ásto en la columna de las centenas de millar.

Existen animales que están acostumbrados a quitarse los parásitos con la cola. Pero hay animales que debido a tener la cola muy pequeña no pueden desprenderse de éstos. El instinto de otros animales es tal, que se convierten en los "pajaros custodias" de éstas moles y viven de ellos, ¿de que forma?, quitandoles los parásitos y moscas, mosquitos, etc... y al mismo tiempo nutriendose de ellos.

Pero no queda ahi la misión de los pajaros custodios. Otra de sus misiones es la de vigia, o sea: muchisimos enormes animales tienen el sentido de la vista muy poco desarrollado, sin embargo el sentido del olfato es al revés, muy desarrollado. Pero a veces, incluso, este fallo y entonces tienen a su "pajaro custodio" (o varios pajaros) que le avisen del peligro que les acecha.

Si sumamos o restamos a ambos lados de una igualdad, un mismo número, la igualdad no varía, por tanto a la expresión (II) le suma la unidad:

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Realizando las operaciones, queda:

$$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Pero:

$$2bc + b^2 + c^2 = (b + c)^2$$

luego podemos poner:

$$1 + \cos A = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

Por otro lado:

$$(b + c)^2 - a^2 = \left[(b + c) + a\right] \cdot \left[(b + c) - a\right]$$

ya que es una diferencia de cuadrados.

Al sustituir nos queda:

$$1 + \cos A = \frac{(b + c + a) \cdot (b + c - a)}{2bc} \qquad (*)$$

Por otro lado, si la expresión (II) la resto ahora de la unidad nos quedará:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Realizamos las operaciones:

$$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

Pero:

$$2bc - b^2 - c^2 = -(b - c)^2$$

luego podemos poner:

$$1 - \cos A = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

Como

$$a^2 - (b - c)^2 = \left[a + (b - c) \right] \cdot \left[a - (b - c) \right]$$

(Diferencia de cuadrados)

Al sustituir, nos queda

$$1 - \cos A = \frac{(a + b - c) \cdot (a - b + c)}{2bc} \qquad (**)$$

Si llamamos ahora al perímetro del triángulo (suma de los lados de un triángulo) 2p, resulta que:

$$a + b + c = 2p$$

$$-a + b + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

Si recordamos las fórmulas del ángulo mitad:

$$1 + \cos A = 2 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \; ; \; 1 - \cos A = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$$

Si sustituimos en las expresiones (*) y (**) todos los valores, tendremos:

"En la (*):

$$2 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2p \cdot 2(p - a)}{2bc}$$

Realizamos una serie de operaciones:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2p \cdot 2(p - a)}{2 \cdot 2bc}$$

Simplificamos

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p - a)}{b \cdot c}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{b \cdot c}}$$

Cálcular las tres últimas cifras de la potencia de un número.

Si la penúltima y última cifra hemos visto que se repite cada ciclo de 20 veces, para cálcular la antepenúltima cifra, la penultima y la última, los ciclos se repetirán a partir de la siguiente cifra del 20 + 4 ó sea, a partir del 25.

Cálcular las tres últimas cifras del mismo número 3^{1234}. Hacemos lo mismo expuesto anteriormente, dividimos el número 1.234 entre 25 y le cifra que nos dá de *resto* es la potencia a consulter para las tres cifras de terminaciones. Nos dá como cociente 49 y como *resto, NUEVE.* Tres elevado a nueve termina en *683.* Luego el número $3^{1.234}$ tiene que terminar forzosamente en .....683.

El islamismo es la segunda religión del mundo en número de fieles.

Fué fundada en Arabia, por Mahoma, en el siglo VII después de Cristo.

Los fieles del islamismo se llaman musulmanes veneran como libro sagrado, el Corán y tienen cinco obligaciones religiosas fundamentales: la profesión de fé, la plegaria, el ayuno, la limosna, y el peregrinaje a la Meca.

Creen en el Dios Alá y Mahoma es su profeta. La plegaria se hace 5 veces al día: al amanecer, después del mediodia, entre las tres y las 5 de la tarde, en el crepúsculo y durante la noche. Los musulmanes rezan con la cara vuelta hacia la Meca.

El ayuno se practica durante el Ramadán que es el noveno mes del año musulmán. Todos ayunan desde la salida del sol hasta el atardecer. Durante el día no se puede comer ni beber pero si en cambio durante la noche.

Todos los musulmanes deben contribuir con un diezmo de sus cosechas o de sus ganancias para usarlos con fines beneficos. Todos los musulmanes tienen, ademas la obligación de peregrinar una vez en la vida a la Meca que es una ciudad santificada por la visita y peregrinación de Mahoma. Los peregrinos dicen sus plegarias en tono a la Kaaba que es un pequeño edificio que oculta la Piedra Negra, deben ademas recorrer los siete caminos sagrados, pasar una noche de plegaria en la colina de Arafa, ofrendar el sacrificio de un cordero en Mina, y derribar una pila de piedras que representan los cultos paganos.

"En la expresión (**)

$$2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{\left[2\,(p - c)\right] \cdot \left[2\,(p - b)\right]}{2bc}$$

Realizamos una serie de operaciones:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{2\,(p - c) \cdot 2\,(p - b)}{2 \cdot 2bc}$$

Simplificamos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - c) \cdot (p - b)}{b \cdot c}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - c) \cdot (p - b)}{bc}}$$

Si ahora dividimos una expresión por otra tenemos:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - c) \cdot (p - b)}{b \cdot c}} : \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{b \cdot c}}$$

Los términos b c se marchan, quedando:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - c) \cdot (p - b)}{p\,(p - a)}}$$

Si variamos las letras, tendremos las restantes fórmulas:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - c) \cdot (p - a)}{p\,(p - b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a) \cdot (p - b)}{p\,(p - c)}}$$

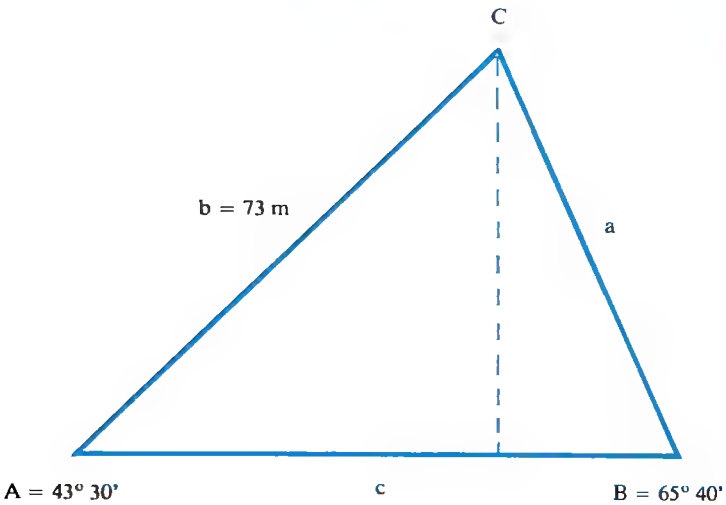
Fórmulas que nos permiten calcular los ángulos de un triángulo, si conocemos los lados:

11.— PROBLEMAS SOLUCIONES

PROBLEMA 1

Resolver un triángulo del que se conoce: el lado b = 73 m y los ángulos A = 43° 30' y B = 65° 40'.

Solución

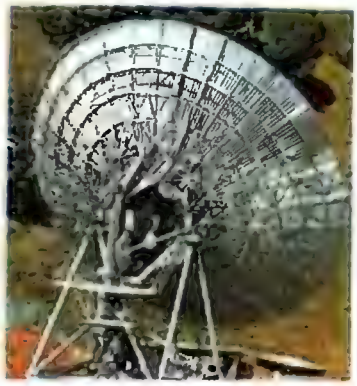


Nos dan	Nos piden
b = 73 m	a
A = 43° 30'	c
B = 65° 40'	C

El cálculo del ángulo que nos falta no nos presenta problemas puesto que:

$$A + B + C = 180°$$
$$C = 180° - (A + B)$$
$$C = 180° - (43° 30' + 65° 40')$$
$$C = 180° - 109° 10'$$
$$C = 70° 50'$$

El cálculo de los lados podemos hacerlo en base al teorema del seno.



Una bellisima parte de la ciencia la constituye la Astronomía que se ocupa de los planetas y estrellas así como de sus agrupaciones en forma de galaxias, y constelaciones.

Una gran dificultad en sus estudios la constituyen las grandes distancias que separan estos elementos del Universo. Esto supone que las unidades de medida sean especiales y por supuesto mucho mayores que las empleadas en sistemas terrestres.

Así por ejemplo la unidad astronómica U.A. que supone la distancia media que existe entre la Tierra y el Sol.

1 U.A. = 149.504.201 Km.

es empleada en medidas del sistema solar siendo la más pequeña de las usadas en Astronomía. El "año luz" es mucho mayor y representa la distancia recorrida en el espacio, por un rayo de luz durante 1 año.

1 año luz = 9.460.000.000 Km.

El año luz simplifica mucho las medidas ya que por ejemplo: Sirio situada a $13.749.328.10^{11}$ en años luz sería 8'7 años luz.

Hay una unidad aún mayor 1 parsec = 3,26 años luz, de gran utilidad en la medida de tan "astronómicas" distancias.

Los avestruces son las aves mas grandes que existen dentro del reino animal, debido a su gran tamaño, son incapaces de volar; pero este inconveniente lo superan con la gran velocidad y resistencia que poseen al correr, que les permite recorrer largas distancias en busca de alimento, en caso de escasez en el entorno que le rodea. Llegan a alcanzar un tamaño de dos metros y medio de altura y casi los mismos de longitud.

Solamente se conoce una especie de avestruces, que habitan en las sabánas y zonas mas deserticas de Africa. Suelen vivir en pequeñas manadas, en las cuales solo existe un macho, que se puede distinguir por poseer un plumaje negro en el cuerpo y unas plumas blancas en la cola. Es el jefe del grupo al cual le acompañan cuatro o cinco hembras, que poseen el plumaje de un color amarillento en el cuerpo, mientras que las plumas de la cola y de las alas no son tan bonitas como la de los machos.

Las avestruces, al igual que casi todos los animales con alguna caracteristica que atraiga al hombre han sufrido grandes persecuciones y cacerias salvajes, debido a su hermoso plumaje, que han llegado a poner en peligro la supervivencia de estas aves tan genuinas como graciosas.

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} \Rightarrow \qquad a = b\,\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}$$

$$a = 73\,\frac{\text{sen } 43^\circ\ 30'}{\text{sen } 65^\circ\ 40'}$$

$$a = 73\,\frac{0'6884}{0'9112}$$

$$a = 55{,}15 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}} \qquad c = \frac{\text{sen C}}{\text{sen B}}$$

$$c = \frac{\text{sen } 70^\circ\ 50'}{\text{sen } 65^\circ\ 40'}$$

$$c = \frac{0'9446}{0'9112}$$

$$c = 75{,}6 \text{ m}$$

PROBLEMA 2

Resolver un triángulo del que se conocen: sus lados a = 20 m y b = 14 m y el ángulo C,57° 59'

Solución

Nos dan

a = 20 m

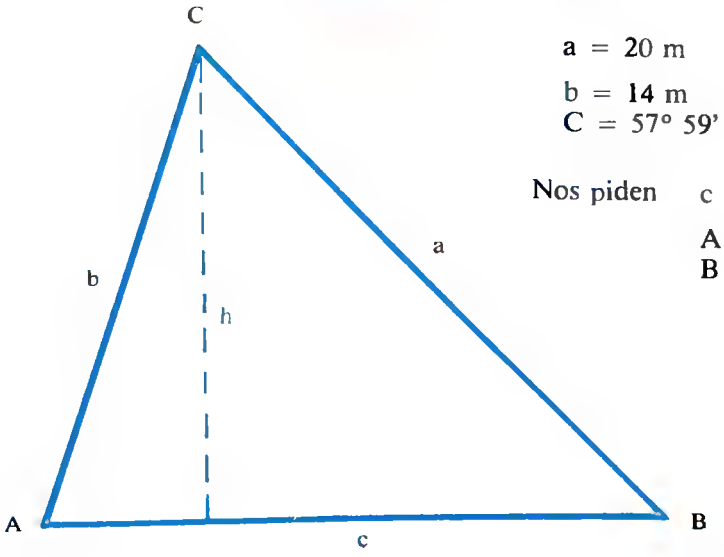
b = 14 m

C = 57° 59'

Nos piden c

A

B



Aplicando el teorema del coseno podemos calcular el lado que nos falta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos C$$

$$c^2 = 20^2 + 14^2 - 2 \cdot 20 \cdot 14 \cos 57° 59'$$

$$c^2 = 400 + 196 - 560 \cdot 0'5359$$

$$c^2 = 295{,}8$$

$$c = \sqrt{295{,}8}$$

$$c = 17{,}20 \text{ m}$$

Para calcular los ángulos podemos aplicar el "teorema del coseno"

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{14^2 + 17{,}20^2 - 20^2}{2 \cdot 17{,}20 \cdot 14} = \frac{196 + 295{,}84 - 400}{48{,}6}$$

$$\cos A = 0{,}1906$$

$$A = \text{arc cos } 0{,}1906$$

$$A \simeq 79°$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos B = \frac{20^2 + 17{,}20^2 - 14^2}{2 \cdot 20 \cdot 17{,}20} = \frac{400 + 295{,}84 - 196}{688}$$

$$\cos B = 0'7265$$

$$B = \text{arc cos } 0'7265$$

$$B \simeq 43° 24'$$

En la batalla naval de "Actium", el emperador Octavio derrotó a los ejercitos egipcios de Marco Antonio y Cleopatra. A su vuelta a Roma victorioso, fué proclamado como un dios, se le concedieron poderes politicos, militares y religiosos. Hasta tal punto fué la adoración por él, que fué llamado Augusto, osea, divino. Fue colmado de honores durante mucho tiempo, e incluso fue venerado como un dios. El senado significaba bien poco y estaba desprovisto de todo poder.

El Imperio Romano estaba constituido por 27 provincias amenazadas por las invasiones de sus vecinos.

Consciente de que el imperio era un plato apetecido por sus enemigos, dedicó toda su vida a renovar las artes, las ciencias y la literatura. Reforzó e instruyó a su ejercito. Los últimos cuarenta años de su reinado, estuvieron marcados por la paz y el bienestar.

La cordillera de los Andes, está situada en América del Sur, atravesando distintos países como Venezuela, Perú, Colombia, Ecuador, Bolivia, Chile y Argentina. Forma el sistema montañoso más extenso del mundo, con una longitud de unos 7.500 km. Debido a su gran longitud, en los Andes se dan toda clase de climas, así en la parte correspondiente a Venezuela, Perú y Ecuador el clima es cálido, donde se da una vegetación muy exuberante. En la parte central de los Andes, Bolivia, el clima es desértico, por lo que las condiciones de vida son muy difíciles. En la zona más meridional, Argentina y Chile, el clima es, por el lado de los andes desértico, y por el lado que va a dar al Océano Pacífico mucho más suave. Es en esta zona meridional donde se encuentran los puntos más altos de los Andes, siendo el Aconcagua, situado en Argentina, con 6.959 m, la montaña más alta.

Los Andes son unas montañas consideradas como "jóvenes", en período de formación todavía. Por ello, se siguen produciendo erupciones volcánicas, así como seismos y terremotos. En estas montañas desarrollaron su vida una de las civilizaciones precolombinas más importantes como fueron los incas.

Debido a la orografía de estas regiones, la comunicación es uno de los problemas con que se encuentran aún hoy, los nativos del lugar.

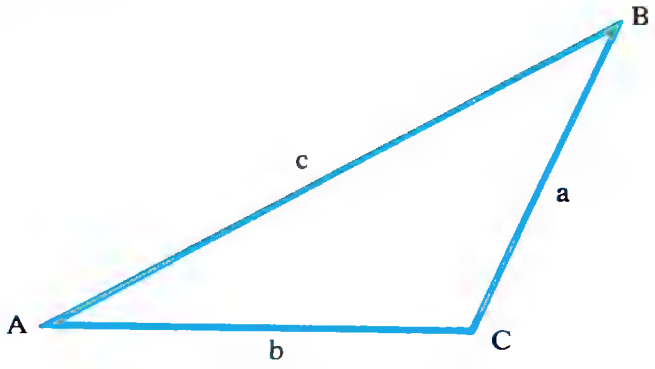
Para ello utilizaban los animales que consiguieron adaptarse el clima de los Andes, siendo los principales las llamas, los guanacos y las vicuñas. Todavía la llama es la más utilizada y es el medio más usual de carga.

PROBLEMA 3

Calcular los ángulos de un triángulo cuyos lados miden: 15 cm, 10 cm y 8 cm respectivamente.

Solución

Nos dan	Nos piden
a = 8 cm	A
b = 10 cm	B
c = 15 cm	C



Este problema tiene solución siguiendo dos métodos diferentes.

1) Por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{15^2 + 10^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 15} = \frac{225 + 100 - 64}{300}$$

$$\cos A = 0{,}87$$

$$A = \text{arc cos } 0{,}87$$

$$A = 29^\circ\ 32'$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$

$$\cos B = \frac{8^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 15} = \frac{64 + 225 - 100}{240}$$

$$\cos B = 0'7875$$

$$B = \text{arc cos } 0{,}7875$$

$$B = 38^\circ\ 03'$$

$C = 180° - (A + B)$

$C = 180° - (29° 32' + 38° 03')$

$C = 180° - 67° 35'$

$C = 112° 25'$

2) Solucionemos ahora el problema por el segundo método. Empleando las "Fórmulas de Brigg".

Como:

$a + b + c = 2p$

$2p = 33$

$p = 16,5$

Posiblemente el río más fértil que existe sea el Nilo. No ya por su caudal o su longitud, sino por la fuerza de sus aguas.

El Nilo, es un río que amenudo se desborda.

Sus inundaciones fertilizan tierras y las hacen aptas para el cultivo. Cuandó llega la época de las lluvias, al ser el lecho del Nilo no lo bastante grande como para contener las aguas, este se desborda inundando los terrenos colindantes, fertilizan y hacen aptas para el cultivo estos terrenos los cuales una vez sembrados sus cosechas son muy abundantes.

Haste tal punto los agricultores de la ribera del Nilo están seguros del desbordamiento del río y a su vez esperanzados, que construyen sus casas en lo alto de las rocas, para así, además de no arrasar el Nilo sus casas, no le roban terreno cultibable a la ribera.

Aqui existe una prueba de que el fango que producen las aguas del Nilo, hacen a esta fertil.

Vivimos rodeados de una extensa cape de aire. Esta masa de eire ejerce un peso sobre la superficie terrestre, esi si tomamos un tubo de vidrio de 1 metro de largo y 1 cm. de grueso, lo llenamos de mercurio y lo sumergimos dentro de un recipiente lleno también de mercurio se produce un efecto muy curioso; ocurre que el tubo empieza a vaciarse, como es logico, mezclandose el mercurio del tubo con el del recipiente. Pero este vaciamiento no es total sino que el tubo queda lleno en unas tres cuartas partes, aproximadamente la altura del tubo lleno será de 760 milimetros. Esto es debido a la presión que ejerce el aire sobre la superficie de mercurio contenido en el recipiente, que es poco mas de un kilo por cm. Por tanto, el mercurio deja de bajar cuando su peso es igual al del aire que presiona sobre la superficie del recipiente.

Sobre cada centimetro cuadrado de nuestro cuerpo el aire presiona de la misma manera, por lo que nuestro cuerpo soporta una presión total de unos 15.000 kilos es decir, 15 toneladas. Si todo pesara sobre una parte nuestro cuerpo, resultaria que la presión del aire nos aplastaria, pero lo que ocurre es que la presión está distribuida por igual en toda la superficie del cuerpo, por lo cual estamos como "apretados" por el aire que nos rodea. Por otra parte, nuestro cuerpo responde a esta presión del aire, asi la sangre ejerce hacia el exterior una presión que contrarresta el aire.

Según la "Fórmula de Brigg":

$$\operatorname{tag}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(16{,}5-10)(16{,}5-15)}{16{,}5(16{,}5-8)}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{6{,}5\cdot 1{,}5}{16{,}5\cdot 8{,}5}} = \sqrt{\frac{9{,}75}{140{,}25}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{A}{2} = \sqrt{0{,}0695} = 0{,}2636$$

$$\frac{A}{2} = \text{arc tag } 0{,}2636 = 14^\circ\ 46'$$

$$A = 29^\circ\ 32'$$

$$\operatorname{tag}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(16{,}5-8)(16{,}5-15)}{16{,}5(16{,}5-10)}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{8{,}5\cdot 1{,}5}{16{,}5\cdot 6{,}5}} = \sqrt{\frac{12{,}75}{107{,}25}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{B}{2} = \sqrt{0{,}1188} = 0{,}3447$$

$$\frac{B}{2} = \text{arc tag } 0{,}3447 = 19^\circ\ 01'$$

$$B = 38^\circ\ 02'$$

$$C = 180^\circ - (38^\circ\ 02' + 29^\circ\ 32')$$

$$C = 180^\circ - 67^\circ\ 34'$$

$$C = 112^\circ\ 26'$$

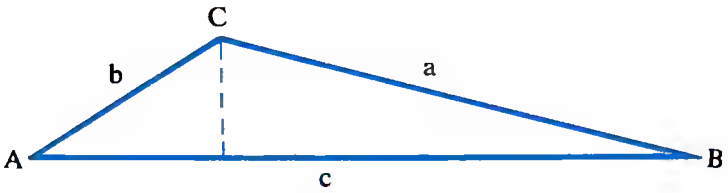
La diferencia, que se puede apreciar, de 1' se debe a que no tomamos valores exactos.

PROBLEMA 4

Resolver el triángulo A B C del que conocemos el lado a = 20 cm y el lado b = 6 cm y el ángulo A = 35°

Solución

Nos dan	Nos piden
a = 20 cm	B
b = 6 cm	C
A = 35°	c



Aplicando el teorema del seno, podemos decir:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

Fue Vespucio el primero que dio noticia de la existencia del Océano Pacífico o Gran Océano, aunque los navegantes hispanolusos, en sus rutas hacia las Indias, fueron quienes lo descubrieron y Magallanes fue quien dio primeramente, idea de su grandiosidad, al cruzar el estrecho que llevó su nombre y llegar a las islas Molucas; a mediados del siglo XVI y durante más de dos siglos, la única línea regular que cruzó el Pacífico fue española con el galeón de Manila.

El Océano Pacífico es el más profundo de los océanos y casi todas sus islas son de origen volcánico o arrecifes de coral. Sus fosas abismales pueden llegar a tener una profundidad de 10.960 metros en las islas Marianas, que como dijimos anteriormente, es la mayor profundidad conocida en los océanos.

En nuestra agitada vida moderna la dependencia del hombre a un horario es indiscutible, desde el trabajo a las diversiones vienen aprovechadas al minuto.

Este necesario control del tiempo es ya antiguo, desde las primeras formas, de civilización se media el tiempo con relojes de arena, de agua o de sol. Las primeras marcaban el paso del tiempo por su equivalencia con el paso del liquido de la arena, el reloj de sol basa sus mediaciones en la longitud y desplazamiento de las sombras provocadas por el movimiento aparente del astro.

El perfeccionamiento técnico alcanzó también a estos aparatos pasando a ser a finales del siglo XVII ingeniosos mecanismos. Son ejemplo de esta evolución los relojes de pendulo basados en las oscilaciones de dicho péndulo y cuyo fundamento se halla en el péndulo matemático. Un fundamento esta vez físico es base para otro mecanismo de medida del tiempo: la torsión de un hilo sólido y rígido que soporta un peso determinado, al girar sobre sí mismo almacena una energía que emplea en recuperar su estado original. Este movimiento de rotación fundamenta el funcionamiento de estos relojes.

Actualmente pueden encontrarse relojes de tipo mecánico basados en el arrollamiento de un muelle en espiral pero estos dan paso a un sistema más exacto y sencillo: los relojes de cuarzo.

Estos relojes aprovechan las vibraciones regulares y continuas de cuarzo mediante una serie de microcircuitos impresos y la lectura de la hora viene dada en forma digital es decir expresada por una cifra y no de forma analógica, osea con las clásicas manecillas.

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

$$\text{sen } B = \frac{6 \cdot \text{sen } 35^\circ}{20}$$

$$\text{sen } B = \frac{6 \cdot 0{,}5736}{20}$$

$$\text{sen } B = 0{,}1720$$

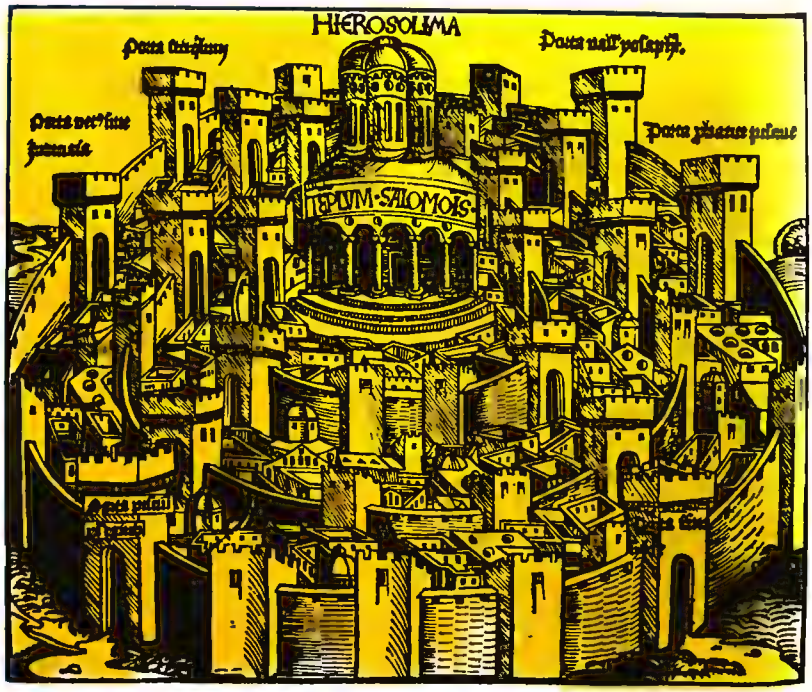
$$B = \text{arc sen } 0{,}1720$$

$$B = 9^\circ\ 55'$$

Para calcular el ángulo que nos falta podríamos decir.

$$C = 180^\circ - (B + A)$$
$$C = 180^\circ - (9^\circ\ 55' + 35^\circ)$$
$$C = 180^\circ - 44^\circ\ 55'$$

$$C = 135^\circ\ 05'$$



Para encontrar el lado que nos falta aplicamos también el teorema del seno.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } c}$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{20 \cdot \text{sen } 135° 05'}{\text{sen } 35}$$

$$c = \frac{20 \cdot 0{,}7061}{0{,}5735}$$

$$c = 24{,}62 \text{ m}$$

PROBLEMA 5

En un triángulo A B C los lados tienen las sigueintes medidas: a = 24 cm, b = 28 cm y c = 36 cm. Calcular el coseno y la tangente del ángulo C.

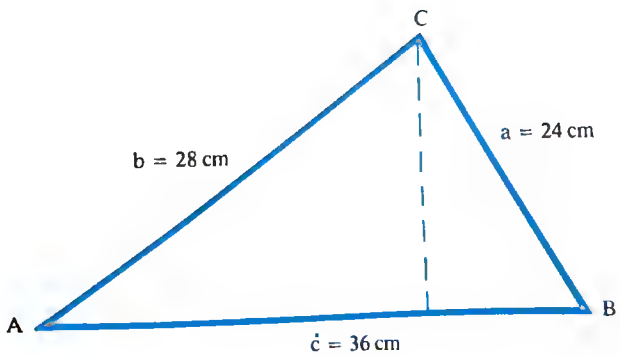
Solución

Nos dan

a = 24 cm
b = 28 cm
c = 36 cm

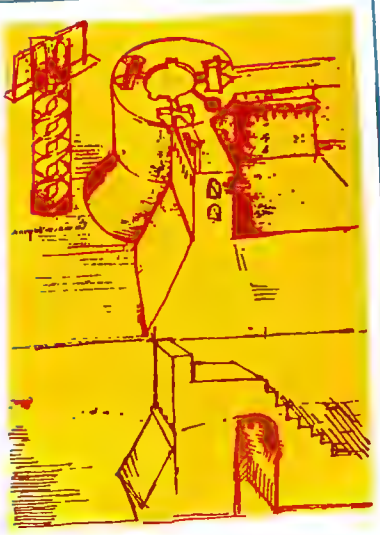
Nos piden

cos C
tag C



El coseno del ángulo se puede calcular directamente mediante el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Según Leonardo de Vinci.

Ninguna investigación humana puede ser denominada ciencia si no pasa a través de pruebas matemáticas.

La ciencia es una investigación realizada por medio del pensamiento, que empieza por el origen último de una materia, más allá de la cual no puede encontrarse nada en la naturaleza que forme parte de aquélla. Tomemos, por ejemplo, la cantidad continua de la ciencia geométrica: si empezamos por la superficie de un cuerpo, vemos que está formado por líneas que son los límites de la superficie. Pero no podemos quedarnos ahí, porque sabemos que la línea, a su vez, está formada de puntos, y que el punto es la unidad última más pequeña tras la cual no existe cosa alguna.

Un punto es aquello que no tiene centro, no tiene ni anchura, ni largura, ni profundidad, la línea es una longitud creada por el movimiento de un punto y sus extremos son puntos, una superficie es una extensión originada por el movimiento transversal de una línea y sus extremidades son líneas. Un cuerpo esta formado por el movimiento lateral de una superficie, tiene anchura y profundidad y sus límites son superficies.

CALCULO MENTAL

Hoy día, en Rusia es muy corriente tener en institutos y universidades, profesores muy ingeniosos para el cálculo mental.

A principios de este siglo, el eslavo Bogdanov, ideó la solución de los ejercicios de calculo mental.

Escribió varios de ellos, pero el que más huella ha dejado es el de:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Un profesor ruso de universidad, abandonó la cátedra aburrido de la monotonia para convertirse enmaestro rural y practicar en la escuela el cálculo mental. Este profesor, (RACHINSKI) fué el precursor de ésta hermosa ciencia. Enseñaba primero a domar la mente, realizando habilísimos ejercicios entre sus alumnos hasta tal punto que los acostumbraba a multiplicar o dividir números de tres cifras, sin necesidad de papel, todo con la mente.

Si vemos el planteamiento anterior, observamos que:

$10^2 = 100 \rightarrow 100$
$11^2 = 121 \rightarrow +121$
$12^2 = 144 \rightarrow +144$
365

$13^2 = 169 \rightarrow 169$
$14^2 = 196 \rightarrow +196$
365

Vemos también que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

Luego la operación es igual a *2*

A esta serie de números se la conoce por la serie de RACHINSKI.

¡Ah! se me olvidaba decir que este personaje era profesor de... Ciencias Naturales.

$$\cos C = \frac{24^2 + 28^2 - 36^2}{2 \cdot 24 \cdot 28}$$

$$\cos C = \frac{576 + 784 - 1296}{1344}$$

$$\cos C = 0{,}0476$$

Para calcular la tangente necesitamos el valor del seno, del coseno calculado anteriormente podemos deducir el ángulo y en base al mismo el seno.

$$\cos C = 0{,}0476$$

$$C = \text{arc cos } 0{,}0476 = 87^\circ\ 16'$$

$$C = 87^\circ\ 16'$$

Luego

$$\text{sen } C = \text{sen } 87^\circ\ 16'$$

$$\text{sen } 87^\circ\ 16' = 0{,}9988$$

Aplicando la definición de la tangente podríamos decir:

$$\text{tag } C = \frac{\text{sen } C}{\cos C}$$

$$\text{tag } 87^\circ\ 16' = \frac{\text{sen } 87^\circ\ 16'}{\cos 87^\circ\ 16'}$$

$$\text{tag } 87^\circ\ 16' = \frac{0{,}9988}{0{,}0476}$$

$$\text{tag } C = 20{,}9831$$

El valor de la tangente se podría también haber calculado simplemente buscándola en las tablas puesto que hemos calculado el valor del ángulo.

PROBLEMA 6

Dos observadores miran un globo que está en el plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre los observadores es de 4 km. Los ángulos de elevación del globo, desde los observadores, son 46° y 52°, respectivamente. Hallar la distancia desde el balón a cada observador y también la altura del balón sobre el suelo.

Solución

Nos dan

$c = 4$ km

$A = 46°$

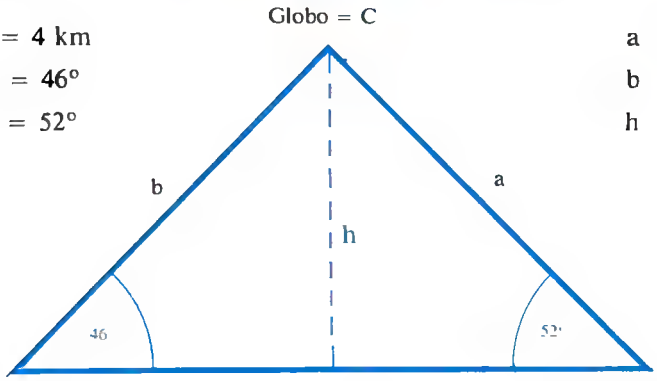
$B = 52°$

Nos piden

a

b

h

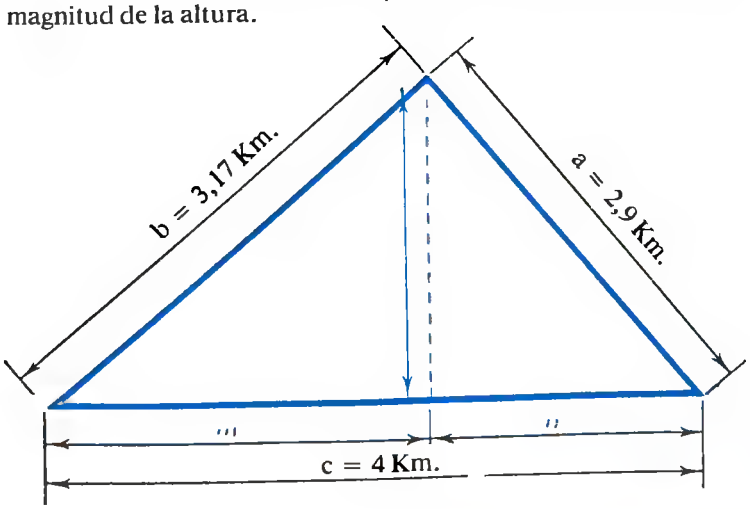


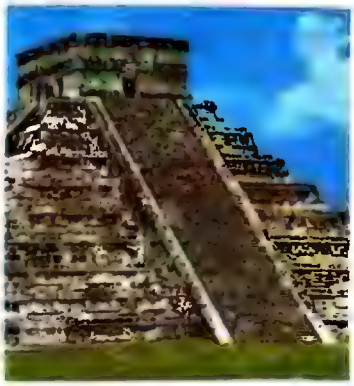
Aplicando el teorema del seno podemos decir:

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{4 \cdot \text{sen } 46°}{\text{sen } 82°} = \frac{4 \cdot 0{,}7193}{0{,}9902} \qquad a = 2{,}9 \text{ km}$$

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A} = \frac{2{,}9 \cdot \text{sen } 52°}{\text{sen } 46°} = \frac{2{,}9 \cdot 0{,}7880}{0{,}7193} \qquad b = 3{,}17 \text{ km}$$

La altura divide al triángulo en dos nuevos triángulos rectángulos, en los que podemos aplicar Pitágoras obteniendo de esta manera un sistema de ecuaciones que nos permitiría deducir la magnitud de la altura.





AMERICA PRECOLOMBINA

Los templos eran pequeñas construcciones realizadas en barro y sin atenerse a ningún orden establecido. Estos se hacían en las cimas de las montañas y eran o bien familiares o bien locales, pero no se realizaban grandes construcciones nacionales y menos aún con reglas y ordenes establecidas.

Sólo los construyeron en piedra los mayas, en México y Guatemala.

Con adobe se construyerón en Perú.

En estos templos habitaba la divinidad y no eran lugares destinados al culto de los dioses.

El culto a los dioses se realizaba al aire libre y siempre fuera del templo. Bien en terrazas adyacentes al templo donde hacían construir pirámides de adoración, o en montículos cercanos al templo.

Las palomas viven agrupadas en grandes colonias en las zonas rocosas o en los acantilados y construyen sus nidos en las fisuras de las rocas. También podemos ver centenares de palomas en las plazas de algunas grandes ciudades.

Dentro de las palomas existen varias razas. Hay palomas capaces de abrir en abanico las plumas de la cola o de hinchar el buche como un globo. Existen otras razas que son muy apreciadas por la calidad de su carne, en cambio otras son apreciadas por sus habilidades, como las palomas capaces de hacer acrobacias volando o de regresar a casa desde muy lejos. Muy interesante es la capacidad de ciertas palomas adecuadamente adiestradas para regresar al lugar de partida aunque se hayan alejado muchos Kilometros, haciendo la función de mensajeras. Todas estas razas especiales son sólo de crianza. En la naturaleza existe únicamente la fuerte y sociable paloma bravía, de la cual se originaron con el paso de los tiempos todas las demás razas. La paloma bravía vive en los bosques templados, donde se alimenta de brotes y semillas de los árboles.

(1) $h^2 = a^2 - n^2$
(2) $h^2 = b^2 - m^2$
(3) $m + n = 4$

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (h, m, n) de fácil solución.

De las dos primeras ecuaciones (1) y (2) podemos poner.

$$a^2 - n^2 = b^2 - m^2$$
$$m+n = 4$$

Sustituyendo a y b por sus valores.

$$2{,}9^2 - n^2 = 3{,}17^2 - m^2$$
$$m + n = 4$$

$$8{,}41 - n^2 = 10{,}05 - m^2$$
$$m + n = 4$$

Despejamos "n" en la segunda ecuación y trasladamos su valor a la primera ecuación.

$$n = 4 - m$$
$$8{,}41 - (4 - m)^2 = 10{,}05 - m^2$$

Quitamos el cuadrado:

$$8{,}41 - (16 + m^2 - 8\,m) = 10{,}05 - m^2$$
$$8{,}41 - 16 - m^2 + 8\,m = 10{,}05 - m^2$$

Agrupamos las incógnitas en el primer mienbro y los números en el segundo.

$$8\,m = 10{,}05 - 8{,}41 + 16$$
$$8\,m = 17{,}64$$

Despejando "m":

$$m = \frac{17{,}64}{8}$$

$m = 2{,}205$ km

Luego:

$$n = 4 - 2{,}205$$

$n = 1{,}795$ km

Trasladando el valor de "n" a la ecuación (1) o el valor de "m" a la ecuación (2) tendremos el valor de "h"

$$h^2 = a^2 - n^2$$
$$h^2 = 2{,}9^2 - 1{,}795^2$$
$$h^2 = 8{,}41 - 3{,}22 = 5{,}18$$
$$h = \sqrt{5{,}18}$$

$h = 2{,}27$

TEMA 31

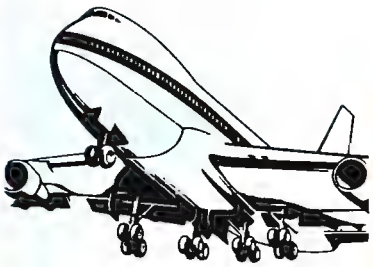
AMPLIACION DE POLINOMIOS

2ª PARTE

FUNCIONES POLINOMICAS

1.—POTENCIA DE POLINOMIOS.
2.—CUADRADO DE POLINOMIOS.
3.—BINOMIO DE NEWTON.
4.—CONCEPTO DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
5.—PROPIEDAD DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
6.—SIMPLIFICACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
7.—REDUCCION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS A COMUN DENOMINADOR.
8.—ADICION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
9.—PROPIEDADES DE LA ADICION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
10.—SUSTRACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
11.—MULTIPLICACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
12.—PROPIEDADES DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
13.—DIVISION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
14.—FUNCIONES POLINOMICAS.
15.—PROPIEDADES.
16.—REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES POLINOMICAS.

TEMA 31



Dentro de las aplicaciones de las emisiones de radio de ondas de alta frecuencia hay que considerar los radiofaros y radiogoniómetros.

Los radiofaros son emisores de señales, son pues estaciones de radio que emiten microondas. Estas ondas son captadas por los navíos y aviones que las analizan e interpretan.

El receptor que capta la señal y la estudia es el radiogoniómetro el cual permite conocer de dónde procede la señal y por tanto es posible calcular su propia posición. El sistema es muy útil ya que dota a la navegación de gran precisión en sus rutas y además en el caso de condiciones meteorológicas adversas garantizandose así la seguridad del viaje. Gracias a los radiofaros y radiogoniómetros así como a otros adelantos técnicos la navegación y la aviación tienen establecidas rutas precisas seguidas con rigor y que garantizan la seguridad y rapidez de este medio de transporte.

AMPLIACIÓN DE POLINOMIOS 2ª PARTE

FUNCIONES POLINÓMICAS

Potencia de polinomios.—

La potencia de un polinomio P(x) es el polinomio modelo de tantos factores iguales al polinomio como unidades tenga el exponente.

$$\left[P(x)\right]^n = P(x)\ P(x)\ \ldots\ldots\ldots\ P(x)$$

Cuadrado de un polinomio

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos, más el doble producto de cada uno de ellos por los que le siguen.

Ejemplo:

Calcular $(3x^2 + x - 2)^2$

Solución

Tenemos que $(3x^2 + x - 2)^2 = (3x^2 + x - 2)(3x^2 + x - 2)$

Multiplicando cada término del primer paréntesis por los del segundo, obtenemos:

$$= 9x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3x^3 + x^2 - 2x - 6x^2 - 2x + 4 =$$
$$= 9x^4 + x^2 + 4 + 2(3x^2)(x) - 2(3x^2)(2) - 2(x)(2) =$$
$$= 9x^4 + 6x^3 + x^2 - 12x^2 - 4x + 4 = 9x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 4$$

Binomio de Newton

Dado el binomio (x + a) queremos calcular sus potencias enésimas: $(x+a)^n$. Para ello utilizaremos la fórmula conocida como binomio de Newton

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}(x)^n + \binom{n}{1}(x)^{n-1}a + ... + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n$$

sería un polinomio de grado "n" en el que nos aparecen "n — 1" términos. El término que ocupa el lugar "r-esimo" será:

$$\binom{n}{r-1} x^{n-r+1} \cdot a^{r-1}$$

Ejemplo

Calcular $(x + 3)^4$

Solución

$$(x + 3)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 \cdot 3 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3}x \cdot 3^3 + + \binom{4}{4}(3)^4 =$$

aplicando las propiedades del número combinatorio, tenemos

$$= 1x^4 + 4x^3 \cdot 3 + 6 \cdot x^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot x \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 =$$

$$= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

Ejemplo:

Calcular $(x — 1)^5$

Solución

Expresaremos

$(x — 1)^5 = [x + (— 1)]^5$ desarrollando como un binomio de Newton.

$$[x + (— 1)]^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}(x)^4 \cdot (—1)^1 + \binom{5}{2}(x)^3(—1)^2 + + \binom{5}{3}(x)^2(—1)^3 + \binom{5}{4}(x)(—1)^4 + \binom{5}{5}(—1)^5 =$$

¡Lo más detestable que ha "inventado" el género humano, son las guerras. El deseo de poder, la ambición, la envidia, la codicia, la venganza, etc... a llevado a naciones e incluso continentes enteros a la guerra. Sobre este tema se reunieron para charlar tres personas conocidas por los apodos de Dª Verdad, Dª Mentira (que siempre mentía) y D. Mediano (que tan pronto decía verdad como mentira).

Uno de ellos (sin especificar) dijo:

¡Desde luego tienes razón, en la maldad de las guerras, la única que resultó aceptable fue la que tuvieron Bolivia y Paraguay hace más de mil años en la que se decidió el fin de la misma pòr la artilleria!.

¡Explicarme esa guerra porque yo no tengo noticias de ella, aunque me confieso que he leído poca historia!.

¡Claro que existió pero no se decidió por la artillería, sino que se decidió por una batalla naval, ya que los barcos antiguos eran de madera y se incendiaron las dos escuadras!.

¿Pudo existir esta batalla?.

Solución página **944**

OPERATIVIDAD SISTEMA BINARIO

DIVISION

Quizá la operación que nos demuestre mejor la perfección de la cibernética, sea la división, al mismo tiempo no debemos olvidar que para realizar ésta tenemos que operar con las tres reglas anteriores (multiplicación, resta y suma).

Ejercicio: Usamos los mismos números anteriores

$$13 : 7 = 1 + \frac{6}{7}$$

Recordemos que la cibernética no tiene cifras decimales y por eso a la fracción decimal la representamos por un quebrado.

$$13_{(10)} = 1101_{(2)}$$

$$7_{(10)}\ 111_{(2)}$$

NOTA: Al igual que en la división decimal las tres primeras cifras del dividendo son menores que las tres del divisor, así pues, tomamos cuatro cifras del dividendo

$$\begin{array}{r|l} 1101 & 111 \\ \hline 111 & 1 \\ \hline 0110 & \end{array}$$

De cociente nos dá UNO y de RESTO 110, si ahora dividis 13 entre 7 (sistema decimal) veis que dá uno de conciente y SEIS de resto. Si ese "6" sistema decimal lo pasais al binario, vereis que dá 110 o sea $6_{(10)} = 110_{(2)}$

Veis que bonito, y que perfección de soluciones.

Dividamos ahora 39 entre 27. Veremos.

$$\begin{array}{r|l} 39 & 27 \\ \hline -27 & 1 \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$= 1 \cdot x^5 + 5 \cdot x^4 (-1) + 10 \cdot x^3 (-1) + 10 - x^2 \cdot (-1)^3 +$$

$$+ 5 \cdot x (-1)^4 + 1 \cdot (-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5 \cdot x - 1$$

Ejemplo:

Calcular el término cuarto de $(x + 3)^7$

Solución

El término sería

$$\binom{7}{4-1} x^{7-4+1} \cdot 3^{4-1} = \binom{7}{3} x^4 \cdot 3^3$$

$$= 35 \cdot x^4 \cdot 27 = 945\ x^4$$

1.— Concepto de fracciones algebraicas

Sea P(x) el conjunto de todos los polinomios con una sola variable x y de coeficientes reales. Consideramos el producto cartesiano $P(x) \times [P(x) - (0)]$, siendo (0) el polinomio nulo, es decir el conjunto de los pares ordenados f(x), g(x) donde $f(x) \in P(x)$ y $g(x) \in P(x) - (0)$

Entonces un par f(x) , g(x) lo expresaremos de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ y lo llamaremos fracción, siendo f(x) el numerador de la la fracción y g(x) el denominador.

Ejemplo:

$\frac{x^2 + 3}{x - 1}$ es una fracción algebráica, siendo $x^2 + 3$ el numerador y $x - 1$ el denominador.

$\frac{x^3 - 2x}{0}$ no es una fracción algebráica ya que el denominador es el polinomio 0.

$\frac{\sqrt{x}}{x^3 + 2}$ no es una fracción algebráica ya que el numerador $\sqrt{x}$ no es un polinomio al ser su grado un número fraccionario.

Definición

Decimos que dos fracciones algebraicas $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ son equivalentes y lo representamos por $\frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si $f(x) \cdot g'(x) = g(x) \cdot f'(x)$.

Ejemplo

Comprobar si son equivalentes las siguientes fracciones

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \qquad \frac{x}{x + 2}$$

Solución

Para que sean equivalentes se tiene que cumplir:

$$(x^2 - 2x)(x + 2) = x(x^2 - 4)$$

$$(x^2 - 2x)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x = x^3 - 4x$$

$$x(x^2 - 4) = x^3 - 4x$$

Como son iguales, podemos afirmar que las fracciones algebráicas son equivalentes. La relación que hemos definido en el conjunto de las fracciones algebraicas es una relación de equivalencia. Esta relación de equivalencia divide al conjunto $P(x) \times [P(x) - (0)]$ en clases de equivalencia. A cada una de estas clases de equivalencia la llamamos razón algebráica.

Ejemplo:

Anteriormente hemos visto que las fracciones $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ y $\frac{x}{x+2}$ son equivalentes, por consiguiente representan la misma razón algebráica.

Propiedad de las fracciones algebraicas

Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción algebráica $\frac{f(x)}{g(x)}$ por un mismo polinomio j(x), distinto de cero la fracción que resulta es equivalente a la dada, es decir, representa la misma razón algebráica.

En efecto se verifica que $f(x) \cdot g(x) \cdot j(x) = g(x) \cdot f(x) \cdot j(x)$,

entonces se verifica que $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f(x) \cdot j(x)}{g(x) \cdot j(x)}$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar la fracción algebraica, basta dividir su numerador y denominador por una misma expresión polinómica.

Una forma de simplificar fracciones algebraicas, consistiría en descomponer el numerador y denominador en producto de factores, suprimiendo aquellos que fuesen iguales, o también

Tenemos 1 como cociente y 12 como resto.

$39_{(10)} = 100111$

$27_{(10)} = 11011$

```
100111 | 11011
- 11011   1
-------
001100
```

Nos dá UNO como cociente y 1100 como resto.

Ahora pasemos el 12 de resto del decimal al binario:

```
12 | 2
 0  6 | 2
    0  3 | 2
       1  1
```

Nos dá $1100_{(2)} = 12_{(10)}$

Vamos, por último a poner una división un poco más complicada y con varias cifras. Vamos a dividir por ejemplo:

$102 : 21 = 4 + \frac{18}{21}$ RESTO

$102_{(10)} = 1100110_{(2)}$

$21_{(10)} = 10101$

```
1100110 | 10101
-10101    100
-------
0010010
```

Vamos a realizar la división paso a paso. Como las cinco cifras del divisor son inferiores a las primeras cifras del dividendo, bajamos éstas y nos cabe a 1. Multiplicando por el divisor nos dá 10101. Esta cifra, (10101) la restamos de las cinco primeras cifras del dividendo nos dá 100, bajamos la siguiente cifra del dividendo tenemos 1001; 1001 dividido entre 10101, no cabe, por lo tanto tenemos cociente CERO y bajamos la cifra siguiente del dividendo. Entonces tenemos 10010, que lo dividimos por 10101 del cociente, no nos cabe (divisor mayor que el dividendo) y tenemos como cociente CERO como RESTO, 10010.

Bien, ahora ¿qué tenemos? un cociente 100, un resto 10010. Pasemos estos números binarios a decimales:

$100_{(2)} = 4_{(10)}$

$10010_{(2)} = 18_{(10)}$

Es tal la perfección de los números binarios y su exactitud, que han sido adoptados éstos para las modernas computadoras.

Vamos con otro ejercicio.

$$743_{(10)} : 24_{(10)} = \frac{743}{24} = 30 + \frac{23}{24}$$

```
743 | 2
14   371 | 2
 03  17   185 | 2
  1  11    05  92 | 2
     1     1  12  46 | 2
              0  06  23 | 2
                 0  03  11 | 2
                    1   1   5 | 2
                            1   2 | 2
                                0   1
```

$$743_{(10)} = 1011100111_{(2)}$$

```
24 | 2
04   12 | 2
 0    0  6 | 2
          0  3 | 2
             1  1
```

$$24_{(10)} = 11000$$

```
1011100111 | 11000
-11000       11110 COCIENTE
010110
010110
 -11000
0101001
-11000
 100011
-11000
 010111
```

Tenemos 11110 como cociente y 10111 como resto.

Vamos a efectuar la prueba, incluso, de la división. Dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto o:

$$D = d \times c + r$$

hallando el m.c.d. del numerador y denominador de la fracción algebraica.

Ejemplo:

Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x^3 - 2x}{3x^2 - x} \,,\, \frac{2x^3 + 2x^2 - 6x + 6}{x^2 - 1} \,,\, \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4}$$

Solución

a) $\dfrac{x^3 + 2x}{3x^2 - x}$

Para simplificar, sacamos factor común x en el numerador y denominador

$$\frac{x^3 + 2x}{3x^2 - x} = \frac{x(x^2 + 2)}{x(3x - 1)} = \frac{x^2 + 2}{3x - 1}$$

b) $\dfrac{2x^3 + 2x^2 - 6x + 6}{x^2 - 1}$

sacamos factor común "2" en el numerador

$$\frac{2(x^3 + x^2 - 3x + 3)}{x^2 - 1}$$

descomponemos numerador y denominador en factores irreductibles:

$$x^3 + x^2 - 3x + 3 = (x + 3)(x - 3)(x + 1)$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Sustituyendo

$$\frac{2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2x^2 - 6}{x - 1}$$

c) $\dfrac{(x+2)^2}{x^2 - 4}$

el denominador es una diferencia de cuadrados, será igual a su suma por su diferencia.

$$\frac{(x+2)^2}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$$

Reducción de fracciones algebráicas a común denominador.—

Como consecuencia de lo visto en el apartado anterior: «dos razones algebráicas siempre tienen representantes con el mismo denominador» para lo cual basta con multiplicar el numerador y denominador de cada uno de los representantes por el denominador del otro.

Ejemplo:

Reduce a común denominador

$$\frac{2x - 1}{x + 3} \text{ y } \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3}$$

Solución

El denominador común será $(x + 3)(x^2 - 3)$

$$\frac{2x - 1}{x + 3} = \frac{(2x - 1)(x^2 - 3)}{(x + 3)(x^2 - 3)} \text{ y } \frac{(x^2 + 2)(x + 3)}{(x + 3)(x^2 - 3)} = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3}$$

y tenemos las fracciones algegráicas con el mismo denominador.

Adición de fracciones algebraicas.—

Dadas dos fracciones algebraicas $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ definimos la adición de ambas como

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g'(x)}$$

Ejemplo:

Calcular la suma de $\frac{x^2 - 3x}{2x - 1} + \frac{3x - 4}{5x^2 - 1}$

Solución

Aplicando lo anterior, tenemos

$$\frac{x^2 - 3x}{2x - 1} + \frac{3x - 4}{5x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 3x)(5x^2 - 1) + (2x - 1)(3x - 4)}{(2x - 1)(5x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{5x^4 - x^2 - 15x^3 + 3x + 6x^2 - 8x - 3x + 4}{10x^3 - 2x - 5x^2 + 1} =$$

1011100111 = 11000 x 11110 + + 10111

11110
x 11000
1111
+ 1111
1011010000
+ 10111
DIVIDENDO 1011100111

El cociente nos dá 11110 y el resto 10111.

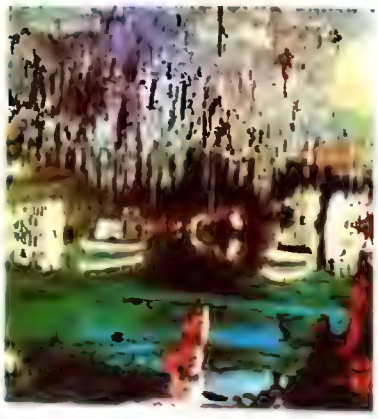
Vamos ahora a pasar estos dos números binarios a decimales: No tenemos más que efectuar las operaciones a la inversa, o sea, en vez de dividir vamos a multiplicar por dos y le añadimos el número siguiente que es el resto, o sea, en vez de tomar el 11110 en base dos pasémoslo a base diez.

1 1 1
1x2=2; 2+1=3; 3x2+1=7
1 0
7x2+1=15 ; 15x2+0=
= 30 — COCIENTE

El resto es 10111. Vamos a pasarlos al decimal.

1 0 1
2x1=2 ; 2+0=2; 2x2+1=5;
1 $1_{(2)}$
5x2+1=11; 11x2+1=
= $23_{(10)}$ RESTO.

Ya creo que tenemos explicada completamente la operatividad de los números binarios.



Las grutas son cavidades naturales de la roca que pueden ser accesibles al hombre. Si las grutas son muy grandes se llaman cuevas y en ellas no entra nunca la luz del sol, la humedad es muy elta. La temperatura permanece constante a lo largo del año.

En la antiguedad las cuevas se utilizaban como vivienda para protegerse del frio y de los animales salvajes, en la actualidad se utilizan para cultivar setas, de las cuevas de Abisinia se extrae el onix, un mármol muy ornamental.

Hay animales cuya vida se desarrolla siempre en el interior de las cuevas, se llaman froglótios: son ciegos o con ojos pequeños, su color es amarillorojizo o blancuzco. Tienen patas muy largas y con pelos.

Los animales que pueden vivir optativamente en las cuevas se llaman croglóficlos: los más conocidos son los murciélagos que aparecen en las grutas colgados de las rocas en letargo permanente.

El origen de las cuevas es debido a la existencia de rocas calcáreas compuestas de carbonato de calcio.

El agua de la lluvia disuelve el carbonato cálcico, así penetra en el subsuelo y deshace la roca. Otras cuevas fueron excavadas por la furia de las olas del mar, o por el agua de las cascadas. Otras en cambio son producto de volcanes, como la gruta de Fiugal de Inglaterra.

$$= \frac{5x^4 - 15x^3 + 5x^2 - 8x + 4}{10x^3 - 5x^2 - 2x + 1}$$

Propiedades de la adición de fracciones algebraicas.

1.— **Asociativa.**—

Dadas tres fracciones algegraicas, se verifica:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} + \frac{f''(x)}{g''(x)}\right] = \left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f'(x)}{g'(x)}\right] + \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo:

Comprobar la propiedad asociativa para las tres fracciones:

$$\frac{x-2}{x}, \frac{x^2-3}{x+2} \text{ y } \frac{4}{2x-1}$$

Solución

Se tendrá que verificar que

$$\frac{x-2}{x} + \left[\frac{x^2-3}{x+2} + \frac{4}{2x-1}\right] = \left[\frac{x-2}{x} + \frac{x^2-3}{x+2}\right] + \frac{4}{2x-1}$$

Para ello ejecutamos el primer miembro de la igualdad, que sería

$$\frac{x^2-3}{x+2} + \frac{4}{2x-1} = \frac{(x^2-3)(2x-1) + 4(x+2)}{(x+2)(2x-1)} =$$

$$= \frac{2x^3 - x^2 - 6x + 3 + 4x + 8}{2x^2 - x + 4x - 2} = \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 11}{2x^2 + 3x - 2}$$

A esta fracción, le sumamos la fracción $\frac{x-2}{x}$

$$\frac{x-2}{x} + \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 11}{2x^2 + 3x - 2} =$$

$$= \frac{(x-2)(2x^2 + 3x - 2) + x(2x^3 - x^2 - 2x + 11)}{x(2x^2 + 3x - 2)}$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 4x^2 - 6x + 4 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 11x}{2x^3 + 3x^2 - 2x} =$$

Agrupando términos del mismo grado, nos queda

$$= \frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$$

Para el segundo miembro hacemos lo mismo

$$\frac{x-2}{x} + \frac{x^2-3}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2) + x(x^2-3)}{x(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 - 4 + x^3 - 3x}{X^2 + 2x} = \frac{x^3 + x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x}$$

Sumando a este resultado la fracción $\frac{4}{2x-1}$

$$\frac{x^3 + x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x} + \frac{4}{2x-1}$$

$$= \frac{(x^3 + x^2 - 3x - 4)(2x-1) + 4(x^2 + 2x)}{(x^2 + 2x)(2x-1)}$$

$$= \frac{2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 8x - x^3 - x^2 + 3x + 4 + 4x^2 + 8x}{2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x} =$$

Agrupando términos del mismo grado

$$= \frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$$

2.— **Conmutativa.** —

Dadas dos fracciones algebraicas se verifica

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} + \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo

Verificar la propiedad conmutativa para las fracciones algebraicas

$$\frac{2x-1}{x+1} \text{ y } \frac{x-1}{x^2+3}$$

Solución

Se tiene que cumplir que

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+3} = \frac{x-1}{x^2+3} + \frac{2x-1}{x+1}$$

La ciencia está siempre al servicio del hombre y en este empeño investiga todas las actividades y facetas humanas.

De ahí que incluso una institución al servicio de la comunidad como la policía se sirve de los avances de la ciencia en su labor de vigilancia para garantizar la libertad.

El estudio de balística o el análisis químico son especialidades científicas de alta utilidad en la labor policial.

Una disciplina de gran importancia es el estudio y análisis de huellas digitales, medidas de cuerpo, retratos-robot, etc.

Por ejemplo el estudio y análisis de huellas digitales tiene aspectos muy interesantes. Los antropólogos dedicados al estudio del hombre y su evolución en el aspecto biológico e intelectual, muestran gran interés por este aspecto tan específico del ser humano.

Las huellas digitales son únicas e irrepetibles en cada individuo de forma que las caracterizan absolutamente, pero a través de ellas podemos hacer un estudio evolutivo del hombre.

Se puede por ejemplo considerar caracteres de las huellas de la palma de la mano y los dedos novedades o características de un tipo racial o incluso de una región dentro de un país.

Actualmente se realizan diversos estudios antropológicos sobre la caracterización de huellas digitales por origen regional, tanto del individuo como en función de su procedencia familiar.

En las tiendas de animales junto a los perros, los gatos, loros, etc., se venden unos animalitos llamados hamsters que son parecidos a ratoncitos y que se alimentan de semilla, raíces, frutos.

En libertad, los hamsters viven en el campo en pequeñas madrigueras que ellos mismos construyen y en las que acumulan gran cantidad de provisiones para la época invernal. Estas provisiones generalmente no las consumen, ya que al empezar el invierno caen en letargo hasta la primavera.

Como todos los roedores los hamsters tienen largos dientes con los que mordisquean todo lo que encuentran.

Los hamsters han sido muy estudiados, para comprender mejor su comportamiento. Hay cosas que hacen por instinto y otras que van aprendiendo de otros animalitos. Los hamsters son muy pacíficos, las hembras alumbran hasta tres veces al año y en cada una de ellas pueden nacer una docena de pequeños. La hembra defiende a sus crías hasta que éstos ya estan en condiciones para separarse de la familia y construir su propia madriguera.

Cuando viven en jaulas, las hembras, machos llegan a devorar a sus pequeños pero si están en libertad son las aves de rapiña y las bestias de su ambiente las que amenazan la vida de estos animalitos.

El primer miembro de la igualdad será:

$$\frac{2x-1}{x+1}+\frac{x-1}{x^2+3}=\frac{(2x-1)(x^2+3)+(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2+3)}=$$

$$=\frac{2x^3+6x-x^2-3+x^2-1}{x^3+3x+x^2+3}=\frac{2x^3+6x-4}{x^3+x^2+3x+3}$$

El segundo miembro será

$$\frac{x-1}{x^2+3}+\frac{2x-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)+(2x-1)(x^2+3)}{(x^2+3)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2-1+2x^3+6x-x^2-3}{x^3+x^2+3x+3}=\frac{2x^3+6x-4}{x^3+x^2+3x+3}$$

Como el resultado es el mismo, nos indica que cumplen la propiedad.

3.— **Elemento neutro**

Existe una fracción algegraica que representamos por $\frac{0}{f(x)}$, tal que para cualquer fracción algebraica $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ verifica que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{0}{f(x)}=\frac{f'(x)\,f(x)+0\cdot g'(x)}{g'(x)\cdot f(x)}=\frac{f'(x)\,f(x)}{g'(x)\,f(x)}=$$

Simplificando

$$=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.— **Elemento opuesto.—**

Cualquier fracción algebraica $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene su opuesta, que representamos por $-\frac{f(x)}{g(x)}$ y que verifica

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\left(\frac{-f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x)+(-f(x))}{g(x)}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x)}{g(x)}=\frac{0}{g(x)}$$

Ejemplo:

Hallar la fracción opuesta de $\frac{x^2-3x-1}{x^2+2}$

Solución

El opuesto consiste en cambiar el signo al polinomio del numerador, es decir, el opuesto será

$$\frac{-(x^2 - 3x - 1)}{x^2 + 2} = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2}$$

Sustracción de fracciones algegraicas.—

Dadas las fracciones algebraicas $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, definimos la diferencia como la suma de una de ellas con el opuesto de la otra, es decir

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} + \left(\frac{-f'(x)}{g'(x)}\right)$$

$$= \frac{f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g'(x)}$$

La sustracción de fracciones algebraicas verifica las mismas propiedades que la atición.

Ejemplo:

Calcular $\frac{3x + 5}{x + 1} - \frac{x^2}{2x^2 - 3}$

Solución

$$\frac{3x + 5}{x + 1} - \frac{x^2}{2x^2 - 3} = \frac{(3x + 5)(2x^2 - 3) - x^2(x + 1)}{(x + 1)(2x^2 - 3)} =$$

$$= \frac{6x^3 - 9x + 10x^2 - 15 - x^3 - x^2}{2x^3 - 3x + 2x^2 - 3} =$$

agrupando términos con igual grado

$$= \frac{5x^3 + 9x^2 - 9x - 15}{2x^3 + 2x^2 - 3x - 3}$$

Multiplicación de fracción algebraica.—

Dadas dos fracciones algebraicas $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, definimos su multiplicación como otra fracción algebraica, cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el

El pueblo hebreo estaba constituído por un grupo de pastores que hace unos 4.000 años llegaron a Palestina desde la otra orilla del Eúfrates, guiados por Abraham. Dios habló a Abraham y le prometió que sus descendientes constituirían un gran pueblo y su destino sería Palestina. Llegados a la Tierra Prometida, los hebreos se convirtieron en un gran pueblo. Su rey David conquistó Jerusalem y Salomón construyó un gran templo.

A la muerte de Salomón el reino se dividió en dos partes, Israel al norte y Judá al sur. Fueron sometidos a muchas persecuciones por los romanos y se extendieron por todo el mundo abandonando Palestina.

En el año 1.948 se creó el actual Estado de Israel en la antigua Tierra Prometida. La religión de los hebreos es el judaísmo que tiene su centro en el templo de Jerusalén.

El templo tenía tres partes y en la central se guardaba el Arca de la Alianza, un gran candelabro con 7 brazos y unas tablillas sobre los que cada día se depositan doce panes frescos. El Arca era un cofre precioso que albergaba los Diez Mandamientos.

El día sagrado para los hebreos es el sábado en el que acuden a la Sinagoga, donde escuchan la lectura de la Biblia y cantan himnos. La oración la dirige un maestro llamado rabino.

Sus fiestas principales son Pascua, Pentecostés, y la fiesta de los Tabernáculos.

Existen a través de leyendas historicas, relatos fantásticos, etc. un miedo enorme a las serpientes. Sabemos en primer lugar, que es un animal frío y viscoso, en parte no es así, esa sensación de viscosidad no es cierta ya que sus escamas están totalmente secas, sólo nos dá esa sensación al ver el brillo de dichas escamas. La serpiente al no tener patas se arrastra. Si a uno de estos animales lo ponemos sobre una superficie completamente lisa como puede ser una chapa metálica o un cristal, vemos como se revuelve, se pliega y repliega y no puede avanzar ya que necesita que la base donde se asienta tenga algo de rugosidad para afianzarse y moverse reptando.

Existen centros de criaderos de serpientes donde se les extrae suero, que a su vez sirve como contraveneno. Una persona mordida por una serpiente venenosa por medio del suero adecuado (contraveneno) se le puede practicar la vacuna.

producto de los denominadores, es decir

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{g(x) \cdot g'(x)}$$

Ejemplo:

Calcular el producto de $\frac{x^2 - 1}{x + 2}, \frac{5x - 7}{x + 1}$

Solución

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{5x - 7}{x + 1} = \frac{(x^2 - 1)(5x - 7)}{(x + 2)(x + 1)} =$$

Como sabemos que $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)(5x - 7)}{(x + 2)(x - 1)}$$

Simplificando esta fracción algebraica

$$\frac{(x - 1)(5x - 7)}{x + 2} = \frac{5x^2 - 7x - 5x + 7}{x + 2}$$

agrupando términos

$$= \frac{5x^2 - 12x + 7}{x + 2}$$

Propiedades de la multiplicación de fracciones algebraicas.—

1.— **Asociativa**

Dadas tres fracciones algebraicas, se tiene que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot \frac{f''(x)}{g''(x)}\right] = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)}\right] \cdot \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo:

Comprobar la propiedad asociativa para

$$\frac{x^2 + 2}{x + 2}, \frac{x^3 - 1}{5x^2 - x}, \frac{x + 2}{x - 1}$$

Solución

Tenemos que comprobar que

$$\frac{x^2+2}{x+2}\cdot\left[\frac{x^3-1}{5x^2-x}\cdot\frac{x+2}{x-1}\right]=\left[\frac{x^2+2}{x+2}\cdot\frac{x^3-1}{5x^2-x}\right]\cdot\frac{x+2}{x-1}$$

Efectuamos el primer miembro de la igualdad

$$\frac{x^3-1}{5x^2-x}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+2)}{(5x^2-x)(x-1)}=\frac{(x^3-1)(x+2)}{5x^3-5x^2-x^2+x}$$

y el resultado lo multiplicamos por $\frac{x^2+2}{x+2}$

$$\frac{x^2+2}{x+2}\cdot\frac{(x^3-1)(x+2)}{5x^3-5x^2-x^2+x}=\frac{(x^2+2)(x^3-1)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(5x^3-5x^2-x^2+x)}=$$

Simplificando:

$$\frac{(x^2+2)(x^3-1)}{5x^3-6x^2+x}=\frac{x^5-x^2+2x^3-2}{5x^3-6x^2+x}=\frac{x^5+2x^3-x^2-2}{5x^3-6x^2+x}$$

Para el segundo miembro será:

$$\frac{x^2+2}{x+2}\cdot\frac{x^3-1}{5x^2-x}=\frac{(x^2+2)(x^3-1)}{(x+2)(5x^2-x)}=\frac{x^5-x^2+2x^3-2}{(x+2)(5x^2-x)}$$

y este resultado lo multiplicamos por $\frac{x+2}{x-1}$

$$\frac{x^5-x^2+2x^3-2}{(x+2)(5x^2-x)}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x^5-x^2+2x^3-2)(x+2)}{(x+2)(5x^2-x)(x-1)}=$$

Simplificando, nos queda

$$\frac{x^5-x^2+2x^3-2}{(5x^2-x)(x-1)}=\frac{x^5-x^2+2x^3-2}{5x^3-5x^2-x^2+x}=\frac{x^5+2x^3-x^2-2}{5x^3-6x^2+x}$$

Como ambas expresiones son iguales, queda demostrada la igualdad.

2.— **Conmutativa.**

Dadas dos fracciones algebraicas, se verifica que

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}$$

Como dato curioso hemos de resaltar que las serpientes son tanto más venenosas cuanto más cálido sea el país en el que viven. Es decir, además de que la mayoría de las serpientes no son venenosas, las que lo son más son aquellos que, por ejemplo, viven en los cálidos desiertos, siendo éstas capaces de matar animales de grandes dimensiones.

Una de las serpientes más curiosas es la *cobra*. Además de ser muy venenosa, impone más el hecho de abrir esa especie de capuchón o paraguas detrás de la cabeza, sólo abre este capuchón al sentirse acosada e irritada.

Otro caso de tener en cuenta es el de los encantadores de serpientes con esa flauta hindú. Nos dá la sensación de que la música es la que encanta a la serpiente, no es verdad, las serpientes no sienten la música, y lo que verdaderamente les hace danzar o moverse de un lado para otro, son los *movimientos de la flauta*. Si la flauta no se moviera, observaríais que la cobra tampoco se movia. Esto as un poco parecido a cuando en un teatro o un circo, un prestidigitador os enseña una mano y la trampa la realiza con la otra.

Calcular las cuatro últimas cifras de la potencia de un número.

Las cuatro últimas cifras de la potencia de un número *ya* es tan fácil como averiguar las tres últimas cifras.

No tenemos nada más que buscar el cíclo, si antes era a partir de 20 + 5 ahora a partir de 20 + 5 + 5, o sea a partir de *treinta* o lo que es lo mismo terminación de

$$\frac{30}{3} = 10$$

El ciclo para las cinco últimas cifras, será de cada 35 y así sucesivamente.

3.— Elemento neutro

Existe una fracción algebraica $\frac{M(x)}{M(x)} = \frac{1}{1}$ que llamamos elemento neutro, verificando para cualquer fracción algebraica

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{n(x)}{n(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

4.— Elemento inverso

Toda fracción algebraica $\frac{f(x)}{g(x)}$, en la cual f(x) se distinta de 0, posee una fracción inversa que será $\frac{g(x)}{f(x)}$ y que verifica:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = 1$$

Ejemplo:

Calcular la fracción inversa de $\frac{2x^2 + 1}{x + 3}$

Solución

La fracción inversa será $\frac{x + 3}{2x^2 + 1}$ y que verifica:

$$\frac{2x^2 + 1}{x + 3} \cdot \frac{x + 3}{2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1)\,(x + 3)}{(x + 3)\,(2x^2 + 1)} = 1$$

5.— **Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.—**

Dadas tres fracciones algebraicas verifican siempre que

$$\frac{f(x)}{g(x)}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{f''(x)}{g''(x)}\right]=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo:

Verificar la propiedad distributiva para las fracciones

$$\frac{x^2}{x^2-1}\,,\,\frac{3x^3-1}{x^2-x}\,,\,\frac{x+1}{x}$$

Solución

Se tiene que cumplir:

$$\frac{x^2}{x^2-1}\left[\frac{3x^3-1}{x^2-x}+\frac{x+1}{x}\right]=\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{3x^3-1}{x^2-x}+\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x}$$

Calculamos el primer miembro

$$\frac{x^2}{x^2-1}\left[\frac{(3x^3-1)\,x+(x^2-x)(x+1)}{(x^2-x)\,x}\right]=$$

Sacamos factor común "x" dentro del corchete

$$\frac{x^2}{x^2-1}\left[\frac{x[(3x^3-1+(x-1)(x+1)]}{(x^2-x)\,x}\right]$$

Simplificando

$$\frac{x^2}{x^2-1}\left[\frac{(3x^3-1)+(x^2-1)}{x^2-x}\right]=\frac{x^2(3x^3+x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-x)}$$

Sacando factor común a "x" en el numerador y denominador

$$\frac{x(3x^4+x^3-2x)}{x(x^2-1)(x-1)}=\frac{3x^4+x^3-2x}{x^3-x^2-x+1}$$

Calculando el segundo miembro

$$\frac{x^2(3x^3-1)(x^2-1)\cdot x+(x^2-1)(x^2-x)\cdot x^2\cdot(x+1)}{(x^2-1)(x^2-x)(x^2-1)(x)}=$$

GRECIA

El templo griego más antiguo que se conoce y el más característico, es el de los dorios mil años a.J.C. Los príncipes aqueos y cretenses construían pequeñas capillas en los palacios donde se veneraba a las divinidades que protegían el palacio real, las ciudades y sus habitantes. Dicho templo, aunque perteneciente al palacio, estaba en un recinto sagrado. Se construyeron en el centro de las ciudades y al lado del palacio, como eran los de Hefesteo y Teseión en Atenas, o en edificios alejados del centro de la población, como el de Egina, Sunión, Heranión, Samos, etc... y también grandes santuarios en las afueras de la ciudad como los de Epidauro, Delfos y Olimpia.

La arquitectura fue transformando la línea de las capillas, las de techos planos fueron construídas con tejados de doble vertiente. Las estatuas de las divinidades adquirieron proporciones humanas y colosales, también añadieron al edificio del templo otra característica obligada, celdas o compartimentos especiales como el "epistódomo" e ingentes columnas en el centro de la nave "prostasis".

Sobre una cimentación maciza se colocaron piedras de sillería cuidadosamente trabajadas, se levantaban los templos con sus columnas perfectamente ordenadas como en el PARTENON.

La decoración interior se realizaba mediante paneles esculpidos, adornos florales. Estatuas o grupos escultóricos, completaban la dacoración tanto interior como exterior.

CIBERNETICA

PROBLEMA INVERSO

Hemos visto que para pasar de un número del sistema decimal al sistema binario, hay que ir haciendo divisiones sucesivas por DOS hsta que el cociente último sea UNO. Ahora hagamos la operación al revés, nos dan por ejemplo el número 111000110 y hay que convertirlo al sistema decimal. No tenemos más que hacer lo siguiente: EL primer número de la izquierda siempre tiene que ser forzosamente un UNO ya que es elúltimo cociente de la división y todos los demás números son restos. Esta cifra tiene nueve números, el resto del último cociente (primer número de la izquierda) lo multiplicamos por dos y le sumamos la cifra siguiente, con este resultado que nos dá hacemos la misma operación y así sucesivamente hasta terminar. Veámoslo, y despacio:

$1 \times 2 + 1 = 3$ dos primeras cifras (cociente y resto)

$3 \times 1 + 1 = 7$ tercera "
$7 \times 2 + 0 = 14$ cuarta "
$14 \times 2 + 0 = 28$ quinta "
$28 \times 2 + 0 = 56$ sexta "
$56 \times 2 + 1 = 113$ séptima
$113 \times 2 + 1 = 227$ octava "
$227 \times 2 + 0 = 454$ novena "

Sacando factor común x^2

$$\frac{x^2\left[(3x^3-1)(x^2-1)x+(x^2-1)(x^2-x)(x+1)\right]}{x^2(x^2-1)(x-1)(x^2-1)}$$

Simplificando y sacando factor común (x^2-1)

$$\frac{(x^2-1)\left[(3x^3-1)x+(x^2-x)(x+1)\right]}{(x^2-1)(x^2-1)(x-1)}=$$

$$=\frac{3x^4-x+x^3+x^2-x^2+x}{x^3-x^2-x+1}$$

Simplificando

$$=\frac{3x^4+x^3-2x}{x^3-x^2-x+1}$$

Como ambos miembros son iguales, se verifica la propiedad.

División de fracciones algebraicas.—

Dadas dos fracciones algebraicas $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, siendo $f'(x)$ distinto de 0, definimos el cociente de ambas como la multiplicación de $\frac{f(x)}{g(x)}$ por el inverso de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)}:\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g'(x)}{f'(x)}=\frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)\cdot f'(x)}$$

Ejemplo:

Calcular la siguiente división de fracciones algebraicas

$$\frac{3x-1}{x+2}:\frac{6x-2}{x+3}$$

Solución

$$\frac{3x-1}{x+2}:\frac{6x-2}{x+3}$$

$$=\frac{(3x-1)(x+3)}{(x+2)(6x-2)}$$

Sacando factor común a "2" en el denominador

$$=\frac{(3x-1)(x+3)}{2(x+2)(3x-1)}$$

Simplificando

$$= \frac{x + 3}{2(x + 2)} = \frac{x + 3}{2x + 4}$$

Las propiedades de la división de fracciones algebraicas serán las mismas que los de la multiplicación.

Funciones polinómicas.—

Una función f(x) definida en el conjunto de los números reales R, se dice que es polinómica, si se puede representar mediante un polinomio, es decir: existe un polinomio $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, con coeficientes "$\alpha_i$ reales tal que $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ para todo $x \in R$.

Por ejemplo la función f: R → R definida por $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$, es una función polinómica porque viene representada por el polinomio $3x^3 - 4x + 1$.

Propiedades de las funciones polinómicas.—

Las funciones polinómicas verifican todas las propiedades de los polinomios.

1 Suma de [illegible] polinómica.

Ejemplo:

Dadas las funciones polinómicas $f(x) = 3x^3 - 5x + 8$ y $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Calcular f(x) + g(x).

Solución

Para calcular la suma se hace del mismo modo que para la suma de polinomios, es decir, se suman los coeficientes del mismo grado.

Así: $f(x) + g(x) = 3x^3 - 5x + 8 + x^2 - 3x + 1 =$

$= 3x^3 + x^2 - 8x + 9$

Como vemos, el resultado es otra función polinómica.

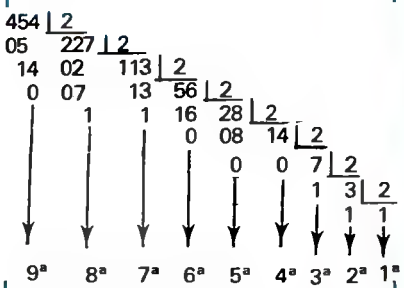
2 Toda función polinómica f(x) tiene función polinomi.a opuesta — f(x).

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Calcular su opuesta.

O sea que el número 111000110 en base dos o binario tiene que ser forzosamente el número 454 en base diez.

Veámoslo:



En esta solución inversa también existe un problema un poco circense. No tenemos más que decirle a un amigo que escriba un número (en el sistema normal nuestro) de las cifras que quiera y que se lo vais a adivinar. Sólo teneis que decirle que vaya efectuando divisiones sucesivas por DOS y que os diga si le dá o no le dá resto en cada una de las divisiones. Al darle resto no teneis más que apuntar un UNO y si no le dá resto apuntais un CERO (habeis visto que solamente se pueden dar estas dos cifras al dividir por dos). Al no poder hacer más divisiones el último cociente tiene que ser también forzosamente un UNO. No teneis más que darle le vuelta a los números que habeis ido anotando si los habeis anotado de izquierda a derecha y si lo quereis hacer más rápido anotar de derecha a izquierda y añadirle eso sí, añadirle un UNO que es el último cociente.

Empezais a multiplicar este último cociente por dos y añadirle el resto y así sucesivamente, o sea a la inversa de lo que el amigo ha hecho. Cuando lo adivineis el número que él ha pensado, la cara de asombro que pondrá será todo un poema y este será el mejor homenaje a vosotros mismos con el orgullo de la *lección aprendida*.

CIBERNETICA

Muchos han sido los libros (sobre todo rusos), que hemos consultado sobre cibernética y en ninguno absolutamente viene explicada la operatividad y menos con las demostraciones.

Esto, podemos decirlo sin jactancia pero con mucha satisfacción, es una PRIMICIA MUNDIAL. Por esta razón toda persona que haya leido, estudiado y practicado las cuatro operaciones (+; −; ×; :) será una de las pocas que hay en el mundo que lo sepa.

Solución

La opuesta a f(x) será otra función que se obtiene al cambiar a los coeficientes de signo.

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1$$

El producto de funciones polinómicas es otra funcion polinómica.

Ejemplo:

Dadas $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x - 1$. Calcular su producto.

Solución

$$f(x)\, g(x) = (x^2 + 1)(3x - 1) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$$

Representación gráfica de las funciones polinómicas.—

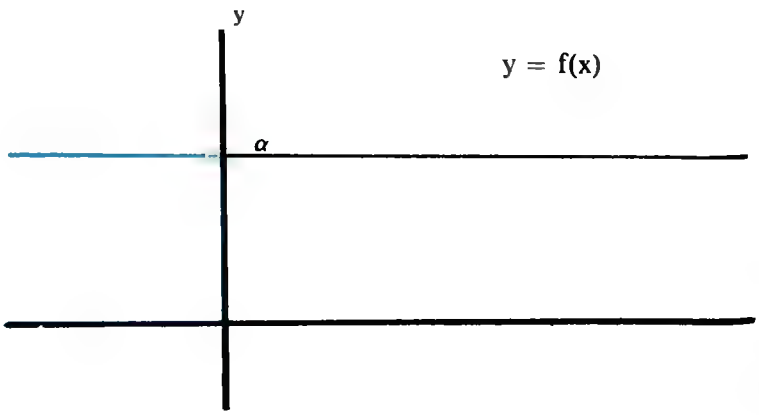
Vamos a estudiar la representación gráfica de tres tipos de funciones polinómicas, la de grado 0, grado 1 y grado 2.

1 — Representación gráfica de funciones polinómicas de grado "0".

Sabemos que un polinomio de grado cero, es el que viene representado por una constante α, por tanto las funciones polinómicas de grado cero, vendrán representadas por

$$f(x) = \alpha$$

La gráfica de esta función será una recta paralela al eje x, a una distancia α.



Esta función verifica que

$$f(-x) = \alpha = f(x)$$

por tanto es una función par, luego es simétrica respecto al eje y.

Además $f(0) = \alpha$.

2 Representación gráfica de funciones polinómicas de grado "1".

Las funciones polinómicas de grado 1 serán de la forma:

$$y = f(x) = \alpha \cdot x + \beta$$

La representación gráfica de este tipo de funciones será siempre una recta.

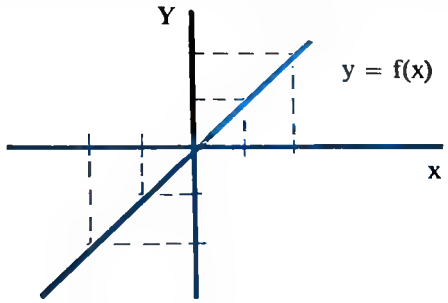
Para la representación gráfica consideramos tres casos:

a) $\alpha = 1\ \beta = 0 \rightarrow y = f(x) = x$

Se verifica que $f(0) = 0$ luego la función f es una recta que pasa por el origen.

También cumple que $f(-x) = -x = -f(x)$, por tanto es una función impar, luego es una función simétrica respecto del origen.

x	y
— 2	— 2
— 1	— 1
0	0
+ 1	+ 1
+ 2	+ 2



b) α = cualquier nº real, $\beta = 0$

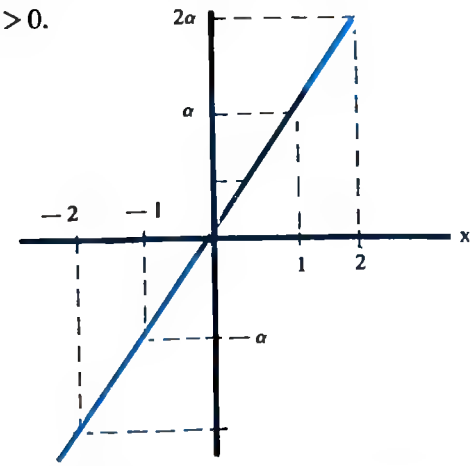
$$y = f(x) = \alpha \cdot x$$

Esta función verifica $f(0) = 0$ y $f(1) = \alpha$, luego será su representación gráfica la recta que pase por los puntos (0,0) y $(1,\alpha)$.

También verifica que $f(-x) = -\alpha x = -f(x)$.

Si suponemos $\alpha > 0$.

x	y
— 2	— 2
— 1	— α
0	0
1	α
2	2α



Los ánades son unas aves que poseen patas palmeadas o en forma de remo, lo que le ha permitido adaptarse perfectamente al agua, siendo unos estupendos nadadores aparte de ser unos perfectos voladores.

Estos animales obtienen del agua de los lagos y estanques sus alimentos, ya que son capaces de sumergirse en el agua y ver a través de ellas pequeñas plantas y animales que les sirven de alimento.

Los ánades suelen vivir tanto en grupos pequeños como en grandes grupos, para protegerse así mejor de las posibles amenazas, así si uno del grupo percibe alguna señal de peligro inmediatamente alza el vuelo y abriendo las alas muestra una pequeña mancha blanca, que sirve a los demás como aviso. Otra forma que utilizan para protegerse es el color de su plumaje, especialmente los más pequeños y las hembras,que es de un tono un tanto apagado, semejante al color del terreno, lo que aprovechan para esconderse y pasar desapercibidas.

Estos animales hacen migraciones cada año, y van hacia el norte en Primavera, estando durante el Otoño en el Sur.

Siempre se ha dicho que los países más racistas del mundo, o son o han sido América del Norte y Alemania. Esto no es cierto. Si estos países quieren aprender lo que es racismo que vayan a Sudáfrica, que de una población de 23.000.000 millones de habitantes, sólo la sexta parte son blancos. Están prohibidos los matrimonios entre blancos y negros. El negro sólo realiza trabajos pesados ya que sólo trabaja en las riquísimas minas de oro, diamantes, uranio, etc... como minero gana la sexta parte que un blanco. Para que un negro pueda trasladarse de una ciudad a otra, necesita un permiso especial otorgado por el gobierno blanco. Para construirse una barraca más grande que la que posee, por necesidades de aumento de familia necesita un permiso especial. Prohibición de asociaciones y de reuniones entre negros. Su documento nacional de identidad consta de casi cien páginas y este documento o libro de referencias, si tuviese alguna mala nota por conducta, tiene muy limitadas sus funciones.

Ahora, eso sí, los principales cargos, empleos, y la mayor parte de la riqueza de esta nación está en manos de los blancos.

Cuando ahora te digan que los países racistas son los primeros que hemos citado (Alemania, EE. UU.) dile a tu interlocutor que esos países son meros aprendices del racismo.

c) "α" y "β" son números reales cualesquiera.

$$y = f(x) = \alpha x + \beta$$

Esta función verifica que $f(0) = \beta$ y además si hacemos que $y = f(x) = 0$, esto implica que:

$$\alpha x + \beta = 0$$

despejando "x"

$$x = \frac{-\beta}{\alpha}$$

por tanto su representación será la recta que pase por los puntos $(0,\beta)$ y $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$. A estos puntos obtenidos los llamamos puntos de corte de la función f(x) con los ejes de coordenadas.

Ejemplo Representar gráficamente $y = f(x) = 2x - 3$.

Solución

Para hallar su gráfica, vamos a calcular los puntos de corte con los ejes.

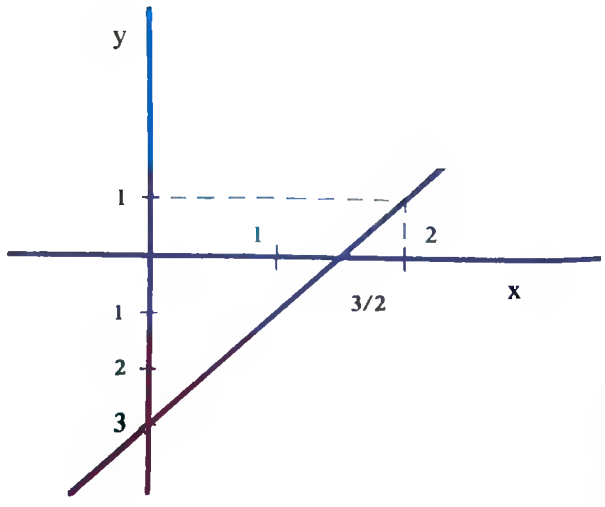
Si $x = 0 \rightarrow y = f(0) = -3$ luego el punto $(0\ -3)$ será el punto de la gráfica de f(x) que corta al eje "y".

Si $y = f(x) = \rightarrow 0 = 2x - 3$. Despejando "x" tenemos $2x = 3$

$$x = \frac{3}{2}$$

Por tanto el punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ es el punto de corte de la gráfica de de f(x) con el eje "x".

x	y
— 2	— 7
— 1	— 5
0	— 3
1	— 1
2	1



Gráfica de la función polinómica de grado 2.

Las funciones polinómicas de grado 2, vendrán representadas por una ecuación de la forma

$$y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

La gráfica de las funciones polinomicas de grado "2", va a ser siempre una parábola.

Vamos a considerar varios casos:

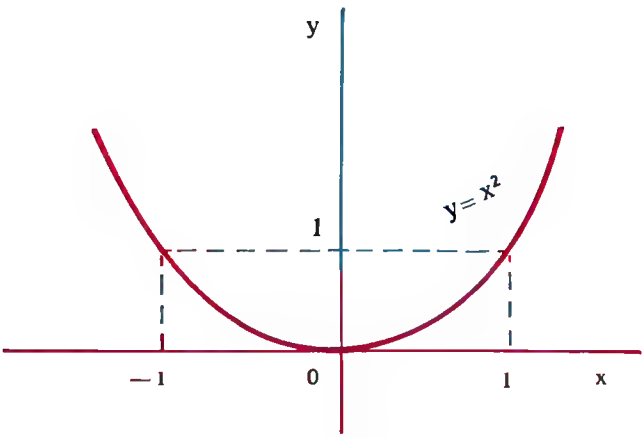
a) Cuando $\alpha = 1, \beta = 0$ y $\gamma = 0$

La función será $f(x) = x^2$. Esta función verifica que, $f(0) = 0$, luego la gráfica de la función pasa por el origen.

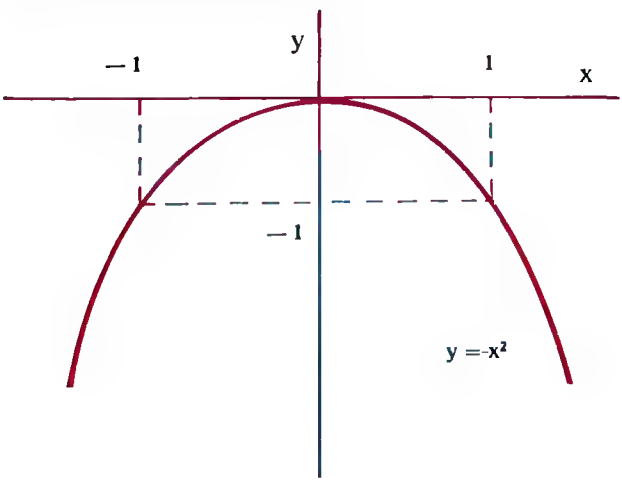
También se cumple que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, luego la función es par, y por tanto es simétrica respecto al eje "y".

Además se cumple que para cualquier valor de "x" distinto de "0"; $y = f(x) > 0$

La gráfica será:



Particularizando, la gráfica $f(x) = -x^2$ será:



En la antigüedad los hombres se mandaban mensajes de unas aldeas a otras por medio de otros hombres a los que se llamaba correos.

Entre los incas del Perú, que no conocían los caballos, los correos llevaban los mensajes a pie a través de las montañas. En las civilizaciones antiguas (Persia, Rome) el sistema era el mismo pero se usaban ya los caballos, estos animales se cambiaban cada cierto tiemo en las llamadas casas de posta donde el correo descansaba y comía. Estos métodos eran más bien lentos y costosos y cuando las naciones fueron creciendo en número y población se vio la necesidad de establecer un servicio de correos por el Estado.

El servicio postal actual nació el año 1840 en Inglaterra. Rowland Hill estableció pagar un precio por el correo, era el sello de correos, que se aplicaba a la carta antes de expedirla.

En la actualidad el proceso es muy sencillo, una carta una vez puesta la dirección del destinatario y el sello correspondiente se deposita en un buzón. Del buzón se llevan a las oficinas de correos para clasificarlas y poner su matasellos.

Luego viajan en tren, avión, etc., hasta su destino, donde nuevamente se clasifican y se entregan a su destinatario.

Entre 1400-1500 se produjo en toda Europa, principalmente en Italia, una corriente cultural, filosófica, política, etc., que produjo una nueva forma de entender la vida. En el terreno científico la idea más sobresaliente fue una nueva concepción del universo.

El estudio de los antiguos textos de matemáticas, ciencias, y filosofía, impulsó a los científicos de la época a la búsqueda de nuevos métodos de investigación. Los inicios de estas investigaciones fueron muy complicados, ya que, aún se consideraba el universo como un inmenso organismo viviente, creado por la voluntad divina, y la ciencia todavía no se había liberado de la superstición.

Leonardo da Vinci, auténtico emprendedor en cuestiones científicas, explicó multitud de fenómenos considerados hasta entonces como misteriosos o "sin explicación", con simples métodos numéricos.

La nueva cultura científica incluyó la ciencia política, es decir, las diferentes formas de asocirse, combatir y gobernar. El amor por la Naturaleza favoreció las primeras clasificaciones de las especies vegetales y animales, mientras que con el estudio de la anatomía se profundizó en el conocimiento del cuerpo humano. La astronomía fue la que sufrió un cambio más profundo, siendo el gran astrónomo polaco Nicolas Copérnico el que más influyera en este cambio. Copérnico, siguiendo unos primeros datos de una teoría griega del siglo IV a. de Cristo, afirmó que el Sol era en centro del universo, negando así la tradición que decía que la Tierra está inmovil en medio del universo. A pesar de las persecucíones y condenas de que fueron objeto todos los seguidores de las ideas de Copérnico, su teoría continuó difundiéndose hasta ser totalmente demostrada y perfeccionada por Galileo y Kepler en el siglo XVII.

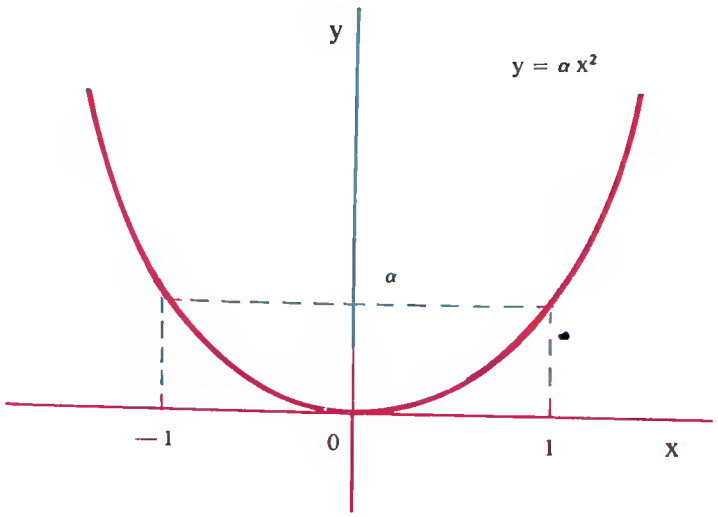
b) α = número real cualquiera.

$\beta = 0$

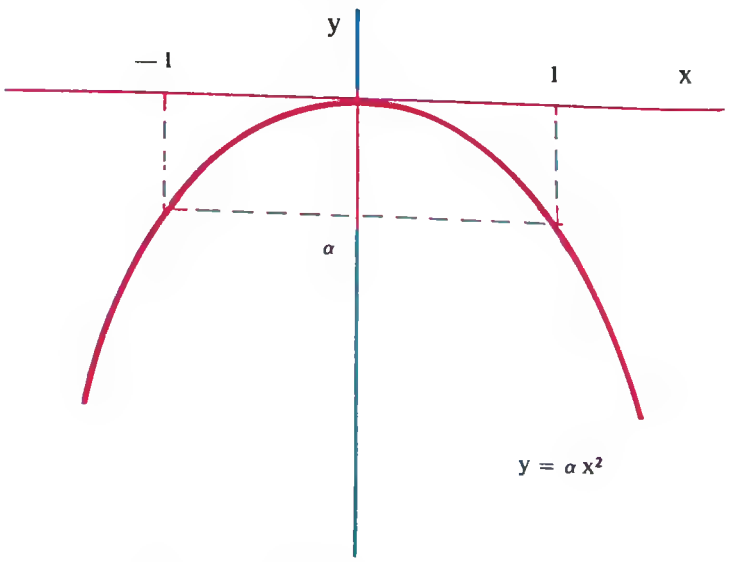
$\gamma = 0$

La función será $y = f(x) = \alpha\, x^2$. Esta función verifica las mismas propiedades que en el caso $f(x) = x^2$, y su representación gráfica será de la misma forma que la anterior, con la única variante de que ésta para por los puntos (1,a) y (— 1,a).

Suponiendo que α, sea mayor que cero ($\alpha > 0$) su representación gráfica será:



Si suponemos que α es menor que cero ($\alpha < 0$) la gráfica será:



c) α = número real cualesquiera

γ = número real cualesquiera

$\beta = 0$

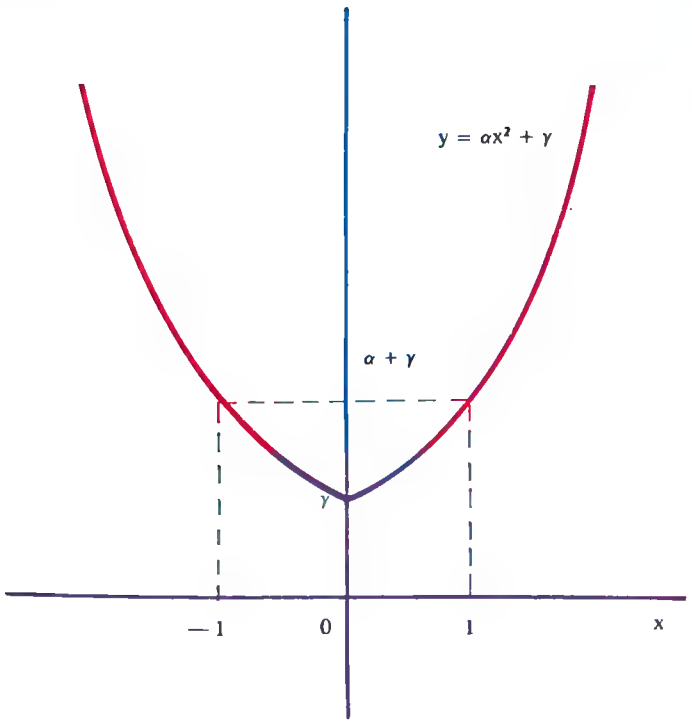
La función será $y = f(x) = \alpha\, x^2 + \gamma$.

Esta función verifica que $y = f(0) = \gamma$.

Luego el vértice de la parábola ya no será el punto "cero" sino el punto $(0,\gamma)$.

Además se seguirá verificando que $f(-x) = \alpha(-x)^2 + \gamma = \alpha x^2 + \gamma$, es decir que $f(x)$ es una función par, luego es simétrica respecto al eje "y".

Si suponemos que $\gamma > 0$, la representación gráfica de la función será la misma que la de $f(x) = \alpha x^2$, trasladada "γ" unidades.



d) α = número real cualesquiera
γ = id. id.
β = id. id.

La función vendrá dada por $y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Para la representación gráfica de esta función necesitamos conocer el vértice de la parábola que representa. Las coordenadas del vértice de la parábola serán $V = (x,y) = -\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$

Pueden ocurrir dos casos:

a) Si el punto $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, la función $f(x)$ alcanza el valor máximo, la gráfica de la función vendrá dada por:

Durante la Edad Media los árabes fueron muy tolerantes hacia los cristianos que se dirigían a los Santos Lugares. Pero en el siglo XI, Jerusalem fue conquistada por los turcos que impidieron estas peregrinaciones.

Para luchar contra los turcos el emperador de Bizancio pidió ayuda al Papa Urbano II que convenció a millares de europeos para acudir a Tierra Santa.

Los crúzados se dirigieron hacia Palestina en el año 1096. Se llamaron cruzados por la cruz roja que llevaban en sus hábitos.

Había gentes que se movilizaron junto a los cruzados pero no por motivos religiosos sino comerciales, o para enriquecerse.

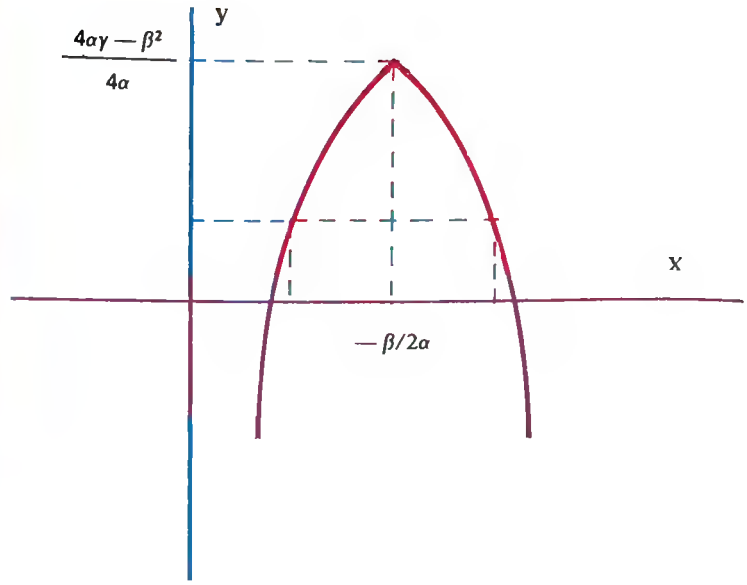
En el año 1099 los cruzados conquistaron la ciudad de Jerusalem.

A partir de esta primera, se organizaron otras siete cruzadas para luchar contra el Islam. Sin embargo no alcazaron el objetivo de reconquistar los Santos Lugares aunque sí tuvieron gran importancia en Europa el descubrimiento de otra civilización y del tráfico comercial a lo largo del Mediterráneo.

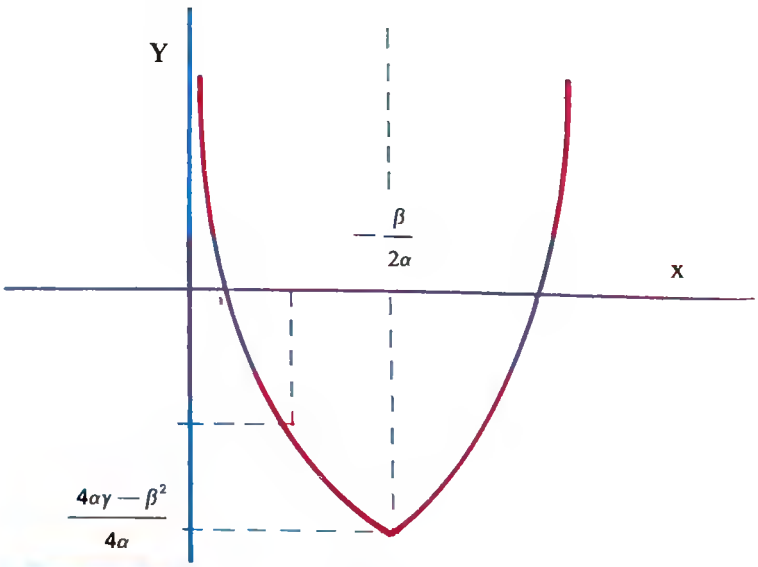
Occidente conoció el algodón, el melocotón, la caña de azúcar y nuevas técnicas como el papel, el espejo de vidrio, etc. Así mismo comienza el interés por las matemáticas y la astronomía que fue muy importante para el desarrollo posterior de la civilización occidental.

Los grandes descubrimientos y las nuevas rutas oceánicas que se abrieron, permitió que muchos países europeos mantuviesen un intenso tráfico de mercancías con sus colonias. Esta revolución comercial será la causa principal que permitirá el desarrollo de la "Revolución Industrial", es decir, los cambios que se producen en distintos países a partir de mediados del siglo XVIII. La revolución industrial también se debió al descubrimiento de que el calor del fuego puede transformarse en energía mecánica, esto llevó a la creación de la máquina de vapor. Una de las aplicaciones más importantes de la máquina de vapor será la creación del ferrocarril, que con su eparición en 1825 señala el comienzo de la segunda revolución industrial.

La sociedad creada a partir de la revolución industrial es totalmente distinta a la anterior. Las condiciones de vida en el campo y la precaria situación de los que trabajen la tierra, hace que grandes masas de población rural vayan a las ciudades en busca de un puesto de trabajo en las industrias de reciente creación. Estas personas que se encontraban separadas de sus costumbres y de su ambiente, tuvieron que trabajar en condiciones infrahumanas, debido que se produjo una abundancia de mano de obra y ésto daba pie a que los industriales impusieran jornadas muy largas con unos salarios bajos. Miles de obreros se instalaban en barrios miserables alrededor de las fábricas y las minas. Este fue el principio de una nueva clase social: el proletariado.



b) Si el punto $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, la función f(x) alcanza el valor mínimo, la gráfica de la función vendrá dada por:



Ejemplo:

Representar la gráfica de la función $y = 2x^2 - 3x + 1$

Solución

Calculamos primero las coordenadas del vértice

$$V = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right) = \left(\frac{-3}{2 \cdot 2}, \frac{4 \cdot 2 \cdot 1 - (-3)^2}{4 \cdot 2}\right)$$

$$= \left(+\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

A continuación, calculamos los puntos de corte con los ejes.

— Puntos de corte con el eje x : $y = 0$

Resolviendo la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0$ nos da los puntos de corte con el eje x.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \dfrac{+3+1}{4} = 1 \\ \dfrac{+3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

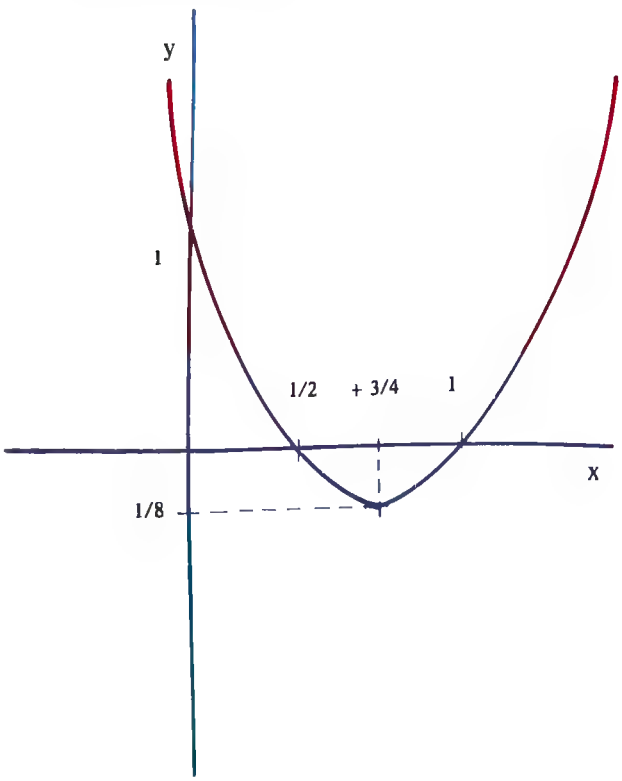
los puntos serán (1,0) y (1/2,0)

— Puntos de corte con el eje y : $x = 0$

Sustituyendo en la ecuaciń el valor $x = 0$, se obtiene el valor y, en este caso $y = 1$.

Punto de corte (0,1).

La gráfica será de la forma



Siempre hemos dicho: de la cantidad sale de la calidad. Es decir, de un centro educativo que tenga mil alumnos, suelen salir más médicos, arquitectos o profesores que de otro centro que no tenga más que cien alumnos. Por otra parte, si a esto se añade que los métodos de enseñanza y los medios, son además más completos e importantes en el cento de educación que tiene mil alumnos que el que tiene cien alumnos, más motivo todavía.

Esto dá pie para considerar en todo el mundo, que el factor educación y formación, hacen más fuerte a una nación. No es ya el caso de más estudiantes medios, sino mejor formados con más técnica y prácticas, con más medios o elementos de estudios, más y mejores universidades y más ayuda a la investigación sobre todo esto último. Toda nación que disponga de muchos centros de investigación estará preparada para conseguir inventos y descubrimientos, y así no tendrá necesidad de cesiones de patentes de otras naciones para fabricar coches, navíos, aviones, etc., con el consiguiente ahorro de divisas.

Estados Unidos, Inglaterra y Japón, países donde se fomenta y se premia la investigación, poseen la propiedad y las patentes de los mejores avances tecnológicos que usamos diariamente.

Estados Unidos y Gran Bretaña, tienen más del 50 % de todos los premios Nobel concedidos hasta la fecha.

El budismo es una religión muy extendida por Asia Oriental, cuenta con unos 200.000.000 millones de fieles. Su fundador, Buda, era un sabio que nació unos 600 años antes de Cristo. Se hizo peregrino alcanzando el conocimiento de la verdad, comenzó a predicar y a congregar discípulos en torno suyo. Los budistas creen en cuatro verdades fundamentales. Primera que en la vida existen muchos sufrimientos. Segunda, explica que los sufrimientos nacen de deseos insatisfechos. Tercera, los sufrimientos terminan sólo con el fin de los deseos. Quien consigue vencer todos sus deseos alcanza "el nirvana". Cuarta, es preciso seguir el "camino de la liberación", consiste en una vida sencilla, honesta, dedicada al bien y a la reflexión.

Tras la muerte de Buda aparecieron sectas tan distintas que se agruparon en dos grandes grupos: el Pequeño Vehículo y el Gran Vehículo, los primeros siguen las antiguas tradiciones mientras que los segundos conceden gran importancia a la oración, las fiestas religiosas, el yoga, etc.

El culto a Buda consiste en ofrendas de flores, ropajes, adornos y música ejecutada ante sus imágenes.

EJERCICIOS Y SOLUCION

1 Calcular $\left(\frac{1}{x} - x^2\right)^4$ por el binomio de Newton.

Solución

Desarrollando por Newton

$$\left(\frac{1}{x} - x^2\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^3(-x^2) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2(-x^2)^2$$

$$+\binom{4}{3}\left(\frac{1}{x}\right)(-x^2)^3 + \binom{4}{4}(-x^2)^4 = \frac{1}{x^4} - 4\frac{1}{x^3}\cdot x^2$$

$$+ 6\frac{1}{x^2}x^4 - 4\frac{1}{x}x^6 + x^8 =$$

Simplificando

$$= \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x} + 6x^2 - 4x^5 + x^8$$

2 —Simplificar las fracciones siguientes:

$$\frac{5x^2 - 15x}{10x^3 + 15x^2}, \quad \frac{3x^2 - 3}{5x - 5}, \quad \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}, \quad \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución

a) $\dfrac{5x^2 - 15x}{10x^3 + 15x^2}$

Sacamos factor común 5x en el numerador y en el denominador

$$\frac{5x(x - 3)}{5x(2x^2 + 3x)} = \frac{x - 3}{2x^2 + 3x}$$

b) $\dfrac{3x^2 - 3}{5x - 5}$

Sacamos factor común "3" en el numerador y 5 en el denominador

$$\frac{3(x^2 - 1)}{5(x - 1)}$$

Descomponiendo en factores $x^2 - 1$ tenemos

$$\frac{3(x^2 - 1)}{5(x - 1)} = \frac{3(x + 1)(x - 1)}{5(x - 1)} = \frac{3(x + 1)}{5}$$

c) $\dfrac{2x - 4}{X^2 - 4x + 4}$

Se comprueba que el denominador es un cuadrado perfecto $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

Sacando factor común 2 en el numerador tenemos

$$\frac{2(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{2}{x - 2}$$

d) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

Descomponiendo en factores numerador y denominador

$$\frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x + 2}{x - 3}$$

3 —Resolver la siguiente ecuación:

$$(x^3 - 8) \cdot 1 = (x - 2)(x + 1)$$

Solución

Despejando 1 de la ecuación

$$1 = \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x^3 - 8)}$$

Descomponiendo en factores el denominador $(x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Entonces

$$1 = \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 4}$$

4 —Dados $A = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y $\beta = \dfrac{3x^2}{x - 1}$, resolver la ecuación

$$C^{-1}(A + C) = B^2$$

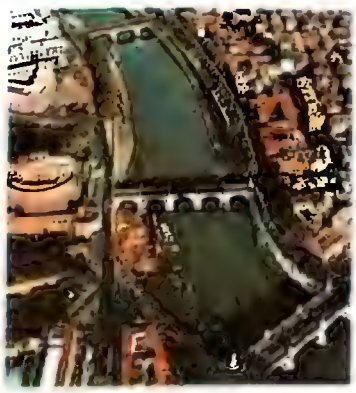
Solución

Sustituyendo los valores de A y B en la ecuación, tenemos:

$$C^{-1}\left(\frac{x}{x^2 - 1} + C\right) = \left(\frac{3x^2}{x - 1}\right)^2$$

Efectuando el producto y teniendo en cuenta que $C^{-1} \cdot C = 1$

$$C^{-1} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} + 1 = \frac{9x^2}{(x - 1)^2}$$



El hombre como todos los animales vive en un ambiente: la ciudad. Esta puede ser muy grande (Tokio) o pequeña (aldea) pero siempre hay unas casas, calles, etc.

Hay ciudades de planta cuadrangular en las que las calles se cruzan en ángulo recto. Otras ciudades tienen una planta radial, como si las casas se hubieran construído a partir del centro de un círculo, a este tipo pertenecen las ciudades de Moscú y París.

Existen ciudades cuya planta es desordenada, se construían generalmente durante la Edad Media, rodeadas de murallas como un medio de defensa frente al enemigo.

Las ciudades surgieron generalmente por razones comerciales, como es el caso de París. Otras surgieron a orillas de ríos navegables como es el caso de Budapest situada a orillas del Oanubio. Otras surgieron en la desembocadura de grandes ríos como Amsterdam, Buenos Aires. Otras ciudades surgieron con motivos defensivos, tal es el caso de Venecia construída por los habitantes de Véneto para defenderse de los bárbaros.

Hay ciudades llamadas políticas que se construyeron para albergar el poder político de un Estado, tal es el caso de Versalles construída a iniciativa de Luis XIV o de Brasilia, la capital de Brasil.

Los etruscos procedían del Asia Menor, dieron nombre al mar Tirreno y se establecieron en la región de Toscana.

Se dedicaron principalmente a la navegación compartiendo con los griegos y cartagineses el dominio del Mediterráneo. Su red comercial fue extendieéndose a lo largo de la península Itálica, Grecia y España. Fueron a su vez, expertos agricultores convirtiendo zonas pantanosas en fértiles y cultivables.

Su actividad artística se puede admirar en sus tumbas donde se han encontrado pinturas, esculturas, joyas, etc. Les gustaban las danzas y la música y se dedicaban al modelado de estatuas, vasos, etc., con arcilla.

Los etruscos fueron uno de los primeros pueblos itálicos que construyeron verdaderas ciudades. Elegían un montículo para el templo y alrededor de él edificaban las viviendas de la población. Cada ciudad era independiente de las demás por lo que nunca crearon un gran Estado.

Los romanos conquistaron Etruria durante los años 400-300 antes de Cristo. Los etruscos aportaron a la nueva civilización costumbre civiles y religiosas, algunas técnicas constructivas como el arco y la bóveda, el alcantarillado, los acueductos y el uso de planos reguladores para las ciudades.

$$C^{-1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{9x^2}{(x-1)^2}-1=\frac{9x^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

Despejando C^{-1}

$$C^{-1}=\frac{9x^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}:\frac{x}{x^2-1}=\frac{[9x^2-(x-1)^2](x^2-1)}{x(x-1)^2}$$

Simplificando

$$=\frac{[9x^2-(x^2-2x+1)](x-1)(x+1)}{x(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(9x^2-x^2+2x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{(8x^2+2x-1)(x+1)}{x^2-x}=\frac{8x^3+2x^2-x+8x^2+2x-1}{x^2-x}=$$

$$=\frac{8x^3+10x^2+x-1}{x^2-x}$$

Si $C^{-1}=\dfrac{8x^3+10x^2+x-1}{x^2-x}$

$$C=\frac{x^2-x}{8x^3+10x^2+x-1}$$

5 — Dados las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{1}{3x^2+7}\quad .,\ h(x)=3x^3-5x+8.,\ g(x)=x^3+\frac{1}{x^2}$$

Indicar si son o no funciones polinómicas.

Solución

a) f(x) no es una función polinómica, ya que está expresada como la inversa de la función polinómica "$3x^2+7$", y la inversa de una función polinomica no es función polinómica.

b) h(x) es una función polinomica, ya que viene expresada por el polinomio "$3x^3-5x+8$"

c) g(x) no es función polinómica, ya que la expresión "$x^3+\frac{1}{x^2}$" no es un polinomio.

6 — Representar las funciones:

$$y=2x+1$$

$$y=-2x^2+3x+2$$

Solución

a) $y = 2x + 1$

Al tratarse de una función polinómica de primer grado, su gráfica será una recta. Por tanto para representarla, bastará con hallar dos puntos.

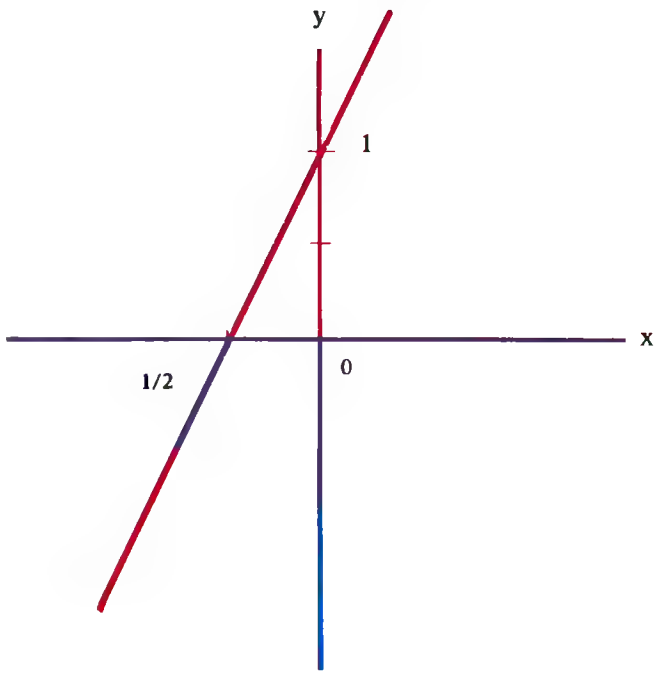
Vamos a calcular los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Punto de corte con el eje x: $y = 0$

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{el punto será } (-1/2,0)$$

punto de corte con el eje y : $x = 0$

$$y = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ el punto será } (0,1)$$

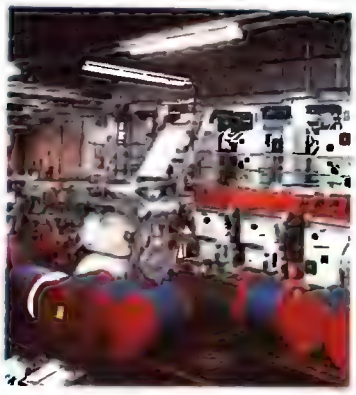


b) $y = 2x^2 + 3x + 2$

Al tratarse de una función polinómica de segundo grado, la representación será una parábola.

El vértice será:

$$V = \left(\frac{3}{2 \cdot (-2)}, \frac{4(-2)\,2 - 9}{4\,(-2)} \right) = \left(+\frac{3}{4}, \frac{+25}{8} \right)$$



En la antigüedad los hombres empezaron a tener curiosidad y necesidad de conocer lo que ocurría en otros lugares, cercanos y lejanos. Por entonces, el sistema más utilizado para difundir a la población noticias y acontecimientos importantes era leerlas en la plaza, por medio de un pregonero, que llamaba la atención con toques de tambor. En el siglo XVI aparecieron los noticieros escritos a mano.

La aparición de la imprenta constituyó el factor necesario para el nacimiento de los periódicos. Según algunos historiadores la primera publicación impresa se hizo en 1609 en Amberes. También aparecieron las gacetas, que eran unas hojas informativas semanales, cuyo origen fue Italia. Su nombre procede de "gazetta", la Gazzetta de France en 1631, la Gaceta de Madrid en 1661, etc.

En el siglo XVIII es cuando se publican en Europa los primeros diarios, y es entonces cuando se produce un gran auge dentro de la actividad periodística. En Inglaterra el primer diario es el Daily Lourant, que se funda en 1702. El primer diario aparecido en España fue el Diario Noticioso, que salió a la luz en 1758 en Madrid, en Francia el primero en aparecer fue el Jounal de París en 1777, que en la actualidad sigue publicándose. En Venecia, en 1765, salió el Diario Veneto. En Hispanoamérica aparecen los primeros periódicos en el siglo XIX, que influirían mucho en el desarrollo del continente, algunos de éstos fueron La Nación de Buenos Aires, El Tiempo en Colombia y El Universal en México.

Solución al problema de la guerra.

(pág. **917**)

Uno dijo que la guerra fue hace más de mil años y con artillería... mintió.

Otro que no tenía ni idea de esa guerra ni en qué condiciones fue hecha... verdad.

Y otro más embustero todavía que el primero, que dijo que se había resuelto por mar. Cualquiera puede ojear un mapa de América del Sur y verá que por desgracia, del único mar que pueden disfrutar tanto los bolivianos, como los paraguayos es el de marcharse a otra nación, ya que son territorios de interior y no disponen ni siquiera de un milímetro de costa.

NOTA: Son las únicas guerras que tolero, las de chiste. No me negará que sería hasta bonito y divertido ver una batalla naval entre Albacete y Toledo.

Punto de corte con el eje x : $y = 0$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

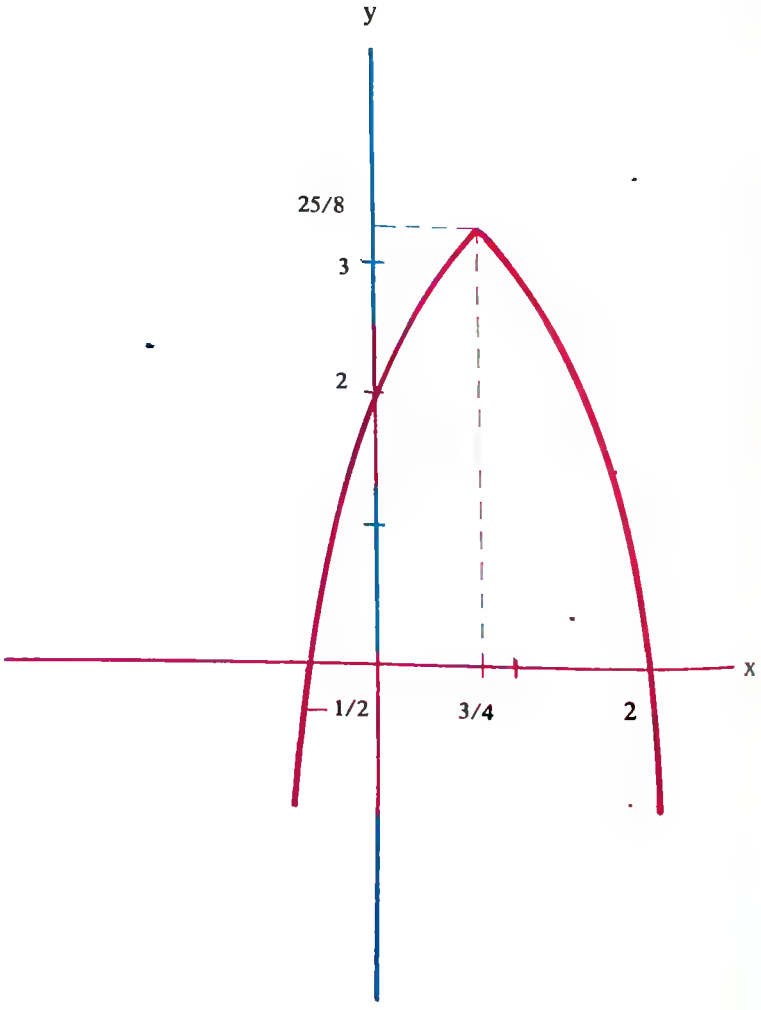
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2(-2)} = \begin{cases} \dfrac{-3+\sqrt{25}}{-4} = \dfrac{-3+5}{-4} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-3-\sqrt{25}}{-4} = +2 \end{cases}$$

La parábola pasará por los puntos (2,0) y (— 1/2, 0).

Puntos de corte con el eje y · $x = 0$

$$y = +2$$

luego el punto será (0,2).



TEMA 32

EL NUMERO COMPLEJO

1.—INTRODUCCION.
2.—DEFINICION DE NUMERO COMPLEJO (FORMA CARTESIANA).
3.—IGUALDAD DE NUMEROS COMPLEJOS.
4.—SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS.
5.—PROPIEDADES DE LA SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS.
   a) Asociativa.
   b) Conmutativa.
   c) Elemento neutro.
   d) Elemento opuesto.
6.—RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS.
7.—PROPIEDADES DE LA RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS.
8.—MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS.
   a) Asociativa.
   b) Conmutativa.
   c) Elemento neutro.
   d) Elemento inverso.
9.—DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS.
10.—UNIDAD IMAGINARIA — POTENCIAS DE "i".
11.—FORMA BINOMIA DEL NUMERO COMPLEJO.
12.—PARTE REAL E IMAGINARIA DE UN NUMERO COMPLEJO.

TEMA 32

CONTINUACION

13.—SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
14.—RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
15.—PRODUCTO DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA.
16.—CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO. PROPIEDADES.
17.—DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BIBINOMICA.
18.—POTENCIAS DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA NOMICA.
19.—RAIZ CUADRADA DE NUMEROS COMPLEJOS.
20.—FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO.
21.—INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS.
22.—FORMA TRIGONOMETRICA DEL NUMERO COMPLEJO.
23.—OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR.
   a) Producto de complejos.
   b) Cociente de complejos.
   c) Potencias de complejos.
   d) Raices de complejos.
24.—EJERCIOS Y SOLUCIONES.

TEMA 32

NUMERO COMPLEJO

Introducción

En el cuerpo de números reales, la ecuación $x^2 + 1 = 0$; no tiene solución; ya que no existe ningún número real que la verifique, pues si existiese tal número debería cumplir que $x^2 = -1$; y esto es imposible, ya que el cuadrado de cualquier número real es siempre positivo.

Por tanto, necesitamos encontrar un cuerpo mayor en el cual tenga solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$. A dicho cuerpo lo llamaremos «cuerpo de los números complejos» y lo representaremos por "C".

Definición de número complejo.—

En el producto cartesiano $R \times R$, es decir, el conjunto de todos los pares ordenados (x,y), donde "x" e "y" pertenecen a R, definimos dos operaciones, suma y producto, que le darán estructura de cuerpo; a este cuerpo le llamaremos «cuerpo de los números complejos». Por tanto, cada número complejo será por definición un par ordenado de números reales (x,y).

Igualdad de números complejos.—

Diremos que dos números complejos (x_1,y_1);(x_2,y_2), son iguales cuando tengan sus componentes respectivamente iguales:

$$(x_1,y_1) = (x_2,Y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \; ; \; y_1 = y_2$$

A todos nos interesa tener el mayor número posible de billetes de banco porque eso significa poder comprar muchas cosas, coches, joyas, etc.

Lo que no es posible que todos sepamos, es que estos billetes aparecieron durante la Edad Media como una forma de sustituir las monedas, ya que los comerciantes tenían que pesarlas, y examinarlas con mucha atención para evitar falsificaciones. Acordaron sustituir las monedas de oro, plata, etc., por hojas de papel firmadas, garantizadas por el metal precioso conservado en las arcas de los bancos.

Estas hojas fueron aceptadas por todos ya que bastaba presentarlas en el banco para poder recibir a cambio la cantidad indicada en ellas de oro, plata, etc.

En la actualidad, el Estado fabrica un número de billetes superior a la cantidad de oro conservado. Por eso el valor de la moneda no se establece de acuerdo a las reservas de oro sino que también lo fija el gobierno del Estado.

GRECIA (continúa)

Los canales de los tejados fueron adornados de hojas de acanto y cabezas de león. Con la influencia corintia esta decoración fue realizada con barro cocido y colores vivos.

Frente a la entrada principal o fachada se encontraba el altar. Cuando los sacrificios eran realizados con animales, éstos se hacían al aire libre y frente al ara.

Un santuario podía tener, incluso, varios templos o altares dedicacos a una misma divinidad. En el Hieron se asociaban pórticos, capillas, cámaras del tesoro e incluso teatros.

Aparte están los templos de los oráculos, como por ejemplo el de Delfos, en que el sacrificio era preliminar a la consulta. El oráculo se ubicaba en una cripta y los consultantes esperaban en la "cella". Templos redondos como el de Delfos y el de Samotracia poseían ciertas características que dificultaban su encuadramiento en la historia del santuario griego. Hay también, multitud de templos griegos que por muy diversos motivos, son atípicos, así pues, podemos decir que no existe ningún templo griego que podamos señalar como modelo. Esto es debido a que además de los templos de las grandes ciudades, en las provincias se construían éstos a instancias y al gusto de los gobernadores importándoles muy poco las reglas de la construcción, su mandato era totalmente dictatorial.

Ejemplo:

Determinar el valor de "x" e "y" para que sean iguales los complejos

$$(x - 3,\ y - 5),\ (4,\ 3)$$

Para que sean iguales, deben de ser iguales sus componentes:

$$x - 3 = 4;\ x = 4 + 3 = 7;\quad x = 7$$

$$y - 5 = 3;\ y = 3 + 5 = 8;\quad y = 8$$

Suma de números complejos.—

Dados dos números complejos $(x_1,y_1);(x_2,y_2)$, definimos su suma del siguiente modo:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + x_2)$$

Ejemplo:

Suma los números complejos:

$$(0,1) \text{ y } (3, -2)$$

$$\left[0 + 3,\ 1 + (-2)\right] = (3, -1)$$

Otro ejemplo: Hallar el número complejo que sumado con $(-1,1)$ nos dé el $(0,3)$

$$(-1,1) + (x,y) = (0,3)$$

Sumando el primer miembro de la igualdad

$$(-1 + x,\ 1 + y) = (0,3)$$

Igualando componentes tendríamos:

$$-1 + x = 0 \rightarrow x = 1$$

$$1 + y = 3 \rightarrow y = 3 - 1 = 2 \rightarrow y = 2$$

Propiedades de la suma de núemros complejos.—

1— **Asociativa**

$$(x_1,y_1) + \left[(x_2,y_2) + (x_3,y_3)\right] = \left[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\right] + (x_3,y_3)$$

2— **Conmutativa**

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_2,y_2) + (x_1,y_1)$$

3— **Existe elemento neutro**

$$(x_1,y_1) + (0,0) = (x_1 + 0,\ y_1 + 0) = x_1,y_1)$$

4— **Todo número complejo tiene un opuesto.**

El opuesto de (x_1,y_1) es $(-x_1,-y_1)$, ya que

$$(x_1,y_1) + (-x_1,-y_1) = (0,0)$$

El opuesto se puede escribir también $-(x_1,y_1)$.

Por todo lo anterior podemos afirmar que el par $(C, +)$ es un «grupo abeliano».

Resta de números complejos.—

La resta de dos números complejos se define como el complejo que resulta al sumar el primero con el opuesto del segundo

$$(x_1,y_1) - (x_2,y_2) = (x_1,y_1) + (-x_2,-y_2) = (x_1-x_2,y_1-y_2)$$

Ejemplo

Calcular la resta de los números complejos

$$(-3), -7) \text{ y } (8, -2)$$

Solución

$$(-3, -7) - (8, -2) = (-3, -7) + (-8, +2) =$$
$$= (-3-8, -7+2) = (-11, -5)$$

Propiedades de la resta de los números complejos —

Tienen las mismas propiedades que la suma.

Multiplicación de números complejos.—

El producto de dos números complejos se define como:

$$(x_1,y_1)\,(x_2,y_2) = (x_1\,x_2 - y_1\,y_2,\ x_1\,y_2 + y_1\,x_2)$$

Ejemplo

Calcular el producto de los números complejos

$$(-3, 0) \text{ y } (2, 1)$$

Solución

$$(-3, 0)\,(2, 1) = (-6, -3-0) = (-6, -3)$$

Propiedades de la multiplicación de números complejos —

1— **Asociativa**

$$(x_1,y_1)\cdot\left[(x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)\right] = \left[(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\right]\cdot(x_3,y_3)$$

Ejemplo

Vamos a demostrar la propiedad anterior con los números complejos (4,1) (2,3) (0, — 2)

La arqueología es una ciencia que se encarga de estudiar los restos del pasado con el fin de poder reconstruir la forma de vida y las costumbres de las civilizaciones antiguas. Los arqueólogos son los encargados de intentar encontrar objetos o lugares donde vivieron esas civilizaciones, y con eso tratar de transmitirnos la mayor imformación posible sobre lo que hacían o a lo que se dedicaban.

La arqueología ha recibido a comienzos de este siglo un gran impulso, debido a la curiosidad del hombre contemporáneo en intentar reconstruir la historia pasada. Por esto, se organizan gran cantidad de expediciones arqueológicas por parte de los organismos oficiales y privados de los distintos países, las cuales están dirigidas por grandes expertos, y en las que puede participar todo aquél que esté interesado por la arqueología. Se realizan grandes excursiones en aquéllos lugares que se cree que ha podido estar enclavado alguna ciudad de la antigüedad. Pero antes de empezar cualquier excavación, se hacen reconocimientos acerca del lugar para determinar posibles zonas arqueológicas mediante el contraste de colores; también se utilizan aparatos magnéticos de gran precisión que ayuda a determinar la importancia del hallazgo. En estas excavaciones se suele encontrar todo tipo de utensilios domésticos de la época, así unas tumbas y restos de seres vivos, que el arqueólogo tiene la misión de determinar la antigüedad de lo encontrado.

Para determinar la edad de los restos humanos encontrados, los arqueólogos utilizan diversas técnicas, siendo la más utilizada la que mide la presencia de carbono en los seres vivos. Se sabe que durante la vida, el carbono simple y el radiactivo o C_{14} están presentes en igual cantidad, después de la muerte el C_{14} disminuye aproximadamente la mitad cada 5.500 años. Entonces midiendo la cantidad de C_{14} de los restos encontrados y comparándolo con el carbono simple, es posible establecer la edad de los restos.

Las aplicaciones del sistema binario son antiquísimas. En china existía un juego llamado NIM o de los tres montones que ya lo usaba. Posteriormente está el del código telegrárico que es relativamente moderno. Impulsos electricos nos indican un número, el uno, y la falta de impulsos indica el cero (ausencia de impulso). Como las letras del alfabeto latino son 29, vamos a explicar los impulsos de cada una de las letras por orden alfabético y binario la primera letra la A será UNO, la última letra, la Z será el 29 (en el sistema decimal y el 11101 en el binario, descompongáse en divisiones sucesivas).

A	1	00001
B	2	00010
C	3	00011
CH	4	00100
D	5	00101
E	6	00110
F	7	00111
G	8	01000
F	9	01001
I	10	01010
J	11	01011
K	12	01100
L	13	01101
LL	14	01110
M	15	01111
N	16	10000
Ñ	17	10001
0	18	10010
P	19	10011
Q	20	10100
R	21	10101
S	22	10110
T	23	10111
U	24	11000
V	25	11001
W	26	11010
X	27	11011
Y	28	11100
Z	29	11101

$$(4,1)\cdot\left[(2,3)\cdot(0,-2)\right]=\left[(4,1)\cdot(2,3)\right]\cdot(0,-2)$$

$$(4,1)\cdot(2,3)\cdot(0,-2)=$$

Efectuamos primero el producto entre corchetes y tenemos

$$\left[(2,3)\cdot(0,-2)\right]=\left[(0,-(-6),0-4)\right]=(6,-4)$$

ahora efectuamos el producto

$$(4,1)\,(6,-4)=\left[(24-(-4),6-16)\right]=(28,-10)$$

Para la segunda parte de la igualdad tenemos

$$\left[(4,1)\cdot(2,3)\right]\cdot(0,-2)$$

igual que antes, efectuamos el producto del corchete

$$(4,1)\,(2,3)=(8-3,2+12)=(5,14)$$

y ahora

$$(5,14)\,(0,-2)=\left[0-(-28),0-10\right]=(28,-10)$$

Como vemos se cumple la propiedad asociativa.

Conmutativa

$$(x_1,y_1)\,(x_2,y_2)=(x_2,y_2)\,(x_1,y_1)$$

Ejemplo

Comprobar que los números complejos (3,1) y (— 2,4) cumplen la propiedad conmutativa.

Solución

$$(3,1)\,(-2,4)=(-2,4)\,(3,1)$$

Efectuamos primero el producto

$$(3,1)\,(-2,4)=\left[-6-4,12+(-2)\right]=(-10,+10)$$

Para el segundo producto tenemos

$$(-2,4)\,(3,1)=(-6-4,-2+12)=(-10,+10)$$

Como vemos, cumplen dicha propiedad.

Elemento neutro.—

El elemento neutro para la multiplicación es el (1,0) así tenemos que

$$(x_1,y_1)\cdot(1,0)=(x_1\cdot 1-y_1\cdot 0,x_1\cdot 0+y_1\cdot 1)=.\quad(x_1,y_1)$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición

$$(x_1,y_1)\cdot\left[(x_2,y_2)+(x_3,y_3)\right]=\left[(x_1,y_1)\cdot(x_2\ y_2)\right]+\left[(x_1\ y_1)\cdot(x_3\ y_3)\right]$$

Ejemplo

Comprobar que se verifica la propiedad distributiva para los siguientes complejos:

$$(1,1)\cdot\left[(-2,0)+(2,-3)\right]=\left[(1,1)\cdot(-2,0)\right]+\left[(1,1)\cdot(2,-3)\right]$$

Ejecutamos primeramente el primer miembro

$$(1,1)\cdot\left[(-2,0)+(2,-3)\right]$$

Efectuando la operación del corchete

$$(1,1)\cdot\left[-2+2,0-3\right]=(1,1)(0-3)=(0+3,0-3)=$$
$$=(3,-3)$$

Comprobando el segundo miembro

$$(1,1)(-2,0)+(1,1)(2,-3)=(-2-0,-2+0)+$$

$$+(2+3;2-3)=(-2,-2)+(5,-1)=(3,-3)$$

Como son iguales, se verifica la propiedad.

Elemento inverso.—

Llamamos inverso del número complejo (x,y) a otro número complejo, que representamos por $(x,y)^{-1}$ tal que verifica:

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

además se verifica que

$$(x,y)\,(x,y)^{-1}=(1,0)$$

División de números complejos

Se define el cociente de dos números complejos, (x_1,y_1) y (x_2,y_2) como el producto de $(x_1\cdot y_1)$ por el inverso de (x_2,y_2).

$$\frac{(x_1,y_1)}{(x_2,y_2)}=(x_1y_1)\cdot(x_2\cdot y_2)^{-1}$$

Ejemplo

Efectuar la división $\dfrac{(-1,2)}{(3,1)}$

Solución

$$\frac{(-1,2)}{(3,1)}=(-1,2)\,(3,1)^{-1}$$

Según hemos visto el inverso de $(3,1)^{-1}$

$$(3,1)^{-1}=\left(\frac{3}{3^2+1^2},\frac{-1}{3^2+1^2}\right)=\left(\frac{3}{10},\frac{-1}{10}\right)$$

Observamos con curiosidad que cada 4 números se produce un ciclo, o sea: 1, 2, 3 y 4 (o A, B, C, CH) al límite de 100, 5, 6, 7, 8 (o D, E. F, G) otro ciclo y el límite de 1000 después de ocho siguientes al límite de 10.000 hasta el 16 ó la N, los 8 siguientes desde el 17 al 24 (desde la N a la U otro ciclo al límite de 11.000.

También vemos de esta manera el aprendernos los primeros números binarios de memoria pero de una forma racional. Empezando por el cero de la numeración decimal podemos numerar binariamente diciendo:

Cero, uno, diez, once, cien, ciento uno, ciento diez, ciento once, mil, mil uno, mil diez, mil once, mil cien, mil ciento uno, mil ciento diez, mil ciento once, diezmil, diezmil uno, diezmil diez, diezmil once, ciezmil cien, diezmil ciento uno, diezmil ciento diez, diezmil ciento once, oncemil, oncemil uno, oncemil diez, oncemil once, oncemil cien, oncemil ciento uno, oncemil ciento diez, oncemil ciento once, etc.

Este sistema numérico es la primera función que llevan los ordenadores. Habeis visto de qué forma más sencilla se van poniendo.

Las armas surgieron como necesidad del hombre primitivo, como un instrumento fundamental a la hora de defenderse de los ataques de algún animal, así como instrumento para la obtención de sus alimentos, a través de la caza. Las primeras armas fueron las hachas, fabricadas con trozos de rocas, más tarde los hombres prehistóricos también utilizaron las flechas.

El tipo de arma fue variando con el paso de los tiempos; a medida que el hombre iba descubriendo nuevos materiales. Fue el descubrimiento del metal, el que más influyó en el desarrollo de las armas. Las armas también fueron cambiando en el transcurso de las distintas civilizaciones, caracterizandose cada una de éstas por el tipo de arma utilizado. Así los griegos se distinguían por las cimeras de sus Yelmos y la civilización oriental se caraztterizó por sus sables de láminas curvas.

Hasta entonces no se conocían las armas de fuego, mucho más efectivas que las armas anteriormente utilizadas. Fue el descubrimiento de la pólvora el que propició el desarrollo de este tipo de armas.

Al principio, las armas de fuego eran unas pesadas piezas de difícil manejo, que con el paso del tiempo se fueron perfeccionando hasta obtener unas armas muy sofisticadas, capaces de efectuar multitud de disparos sin la necesidad de ser recargadas entre disparo y disparo.

También se han desarrollado otro tipo que son las llamadas armas biológicas o químicas que son capaces de producir grandes trastornos, tanto físicos como psicológicos, sobre aquellas personas que sufran sus efectos.

Realizando el producto $(-1,2)\left(\frac{3}{10}, \frac{-1}{10}\right) =$

$$= \left(-\frac{3}{10} + \frac{2}{10}, \frac{6}{10} + \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

La división de los números complejos verifica la siguiente propiedad:

$$\frac{(x_1, y_1)}{(1,0)} = (x_1, y_1)$$

Unidad imaginaria.—

Llamamos unidd imaginaria, y la representación con la letra "i" a un número que multiplicado por sí mismo, nos da "— 1", es decir,

$$i = \sqrt{-1}$$

Si tenemos un número real "y", llamamos número imaginario al producto "y · i".

Ejemplo

Realiza la operación $\sqrt{-100}$

Solución

$$\sqrt{-100} = \sqrt{100\,(-1)} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{-1} = 10i$$

10i número imaginario

Potencias de "i".—

Vamos ahora a ver el valor que toman las sucesivas potencias de "i".

$i^0 = 1$; ya que cualquier potencia elevada a cero, es la unidad.

$i^1 = \sqrt{-1} = i$

$\cdot\ i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\cdot\ i^3 = i^2 \cdot i = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot i = -i$

$\cdot\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

A partir de la cuarta potencia, los valores de i se van repitiendo periódicamente, de tal forma que los valores que pueden tomar las potencias son:

$$i, -1; -i; 1$$

Esto es fácil de demostrar. Si al exponente le llamamos "m" y este es un número entero, siempre se cumplirá:

$$m = 4 \cdot k + n$$

Siendo $n < 4$

Así pues, la unidad imaginaria i, elevada a un número m, tomará el valor.

$$i^m = i^{4k+n}$$

Por el concepto de potencias, tendremos:

$$i^{4k+n} = i^{nk} \cdot i^n = (i^4)^k \cdot i^n$$

Pero anteriormente se demostró que

$$i^4 = 1 \Rightarrow (i^4)^k = 1^k = 1$$

Por tanto:

$$i^{4k+n} = i^n$$

Como el número n, es menor que 4, la potencia sólo podrá tener de exponente los números O, 1, 2, 3, dando sus potencias los valores 1, i, — 1, — i, respectivamente, tal como indicamos en un principio.

Ejemplo

Calcular el valor de i^{205}

Solución

$$205 = 4 \cdot 51 + 1$$

Por tanto

$$i^{205} = i^{4 \cdot 51+1} = (i^4)^{51} \cdot i^1$$

$$\text{Como } i^4 = 1 \Rightarrow (i^4)^{51} = (1)^{51} = 1$$

luego

$$i^{205} = 1 \cdot i^1 = i$$

$$i^{205} = i$$

Ejemplo

Calcular el valor de i^{-27}

Solución

Según el concepto de potencia

$$i^{-27} = \frac{1}{i^{27}}$$

Los incas antes de formar un gran imperio eran un pequeño pueblo cuyo nombre deriva del que se daba a su caudillo: el inca.

Vivían en el valle de Cuzco. La llegada de Pachacuti al trono señala la aparición del imperio incaico hasta la conquista por Francisco Pizarro en 1533.

La base de la sociedad era el ayelu, una especie de clan de familias. El imperio estabe encabezado por el inca.

La religión se basaba en el culto al Sol (Inti) representado por esferas de oro macizo. El pueblo veneraba los fetiches o huacos.

Hubo grandes constructores y aún hoy existen templos como Coricancha en la ciudad baluarte de Machu-Picchu.

Los incas construyeron un sistema de carreteras que unían todos los puntos con la capital.

Su lengua fue el quechua y aunque no existe una escritura incaica tenían un sistema de transmisión de mensajes por medio de hebras de lena con nudos que se llamaban quipos.

En cerámica destacan vasos de madera llamados queros y como conocían el telar tuvieron gran producción de tejidos.

Los trabajos en metales preciosos se han perdido o quedan muy pocos debido que con el paso del tiempo se fundieron para convertirlos en lingotes.

El río Mississippi forma junto con su afluente el río Missouri uno de los sistemas fluviales mayores del mundo.

Tiene su nacimiento en el lago Itasca y recibe grandes afluentes: Ohio, Arkansas, Minnesota, etc. formando una gran red navegable.

El Mississippi es un río legendario, sus aguas fluyen a través de bosques habitados antiguamente por leñadores y traficantes de pieles. Los leñadores construían balsas de miles de metros cuadrados para transportar madera hasta los mercados.

El curso bajo del río es una sucesión de algodonales que hacen a la memoria el pasado de esclavitud de los negros.

A lo largo de su curso han ido surgiendo grandes núcleos urbanos como Saint Paul, centro ganadero Saint Louis una de las ciudades más modernas de Estados Unidos. Memphis, gran centro algodonero y por último Nueva Orleans cuyo puerto es uno de los más importantes del mundo y donde se inicia el delta del Mississippi. Esta delta es un conglomerado de pozos de petroleo hasta la desembocadura en el golfo de México, como si el río quisiera seguir proporcionando riqueza antes de que sus aguas se pierdan en el mar.

Por otro lado

$$i^{27} = i^{4\cdot6+3} = i^{4\cdot6} \cdot i^3 = (i^4)^6 \cdot i^3$$

Como $i^4 = 1 = 1 \Rightarrow (i^4)^6 = (1)^6 = 1$

luego

$$i^{27} = 1 \cdot^3 = i^3$$

Pero anteriormente se demostró que $i^3 = -i$, por tanto sustituyendo, queda:

$$i^{-27} = \frac{1}{i^{27}} = \frac{1}{i^3} \qquad \frac{1}{-i}$$

$$i^{-27} = \frac{1}{-i}$$

Ejemplo:

Calcular el valor de i^{20}

Solución

$$i^{20} = i^{4\cdot5+0} = (i^4)^5 \cdot i^0$$

Como $i^4 = 1$ y $i^0 = 1$, tenemos

$$i^{20} = 1$$

Forma binómica del numero complejo.—

Una vez conocida la unidad imaginaria vamos a ver la representación en forma binómica de un número complejo (x,y).

El número complejo (x,y) está escrito en forma binómica cuando lo expresamos:

$$x + yi$$

Ejemplos:

Escribe en forma binómica los siguientes números complejos (3,2) (0,1) (— 3,0)

$$(3,2) \longleftrightarrow 3 + 2i$$

$$(0,1) \longleftrightarrow 1i$$

$$(-3,0) \longleftrightarrow -3$$

Parte real y parte imaginaria de un número complejo.—

Dado $z = x + yi$, un número complejo expresado en forma binómica, se llama parte real de z y se escribe Re(z) al número

real "x" y parte imaginaria de z y se escribe Im(z), al número real "y".

Ejemplo: Calcular las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos:

$z_1 = 3 + i$

$z_2 = -2$

$z_3 = -3i$

Solución

$Re(z_1) = 3;\ Im(z_1) = 1$

$Re(z_2) = -2;\ Im(z_2) = 0$

$Re(z_3) = 0;\ Im(z_3) = -3$

Suma de números complejos en forma binomica.—

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$; $z_2 = x_2 + y_2 i$ en forma binómica definimos su suma de la siguiente manera:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$$

Se verifica que, $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$

La parte imaginaria será:

$$Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$$

Ejemplo:

Dados $z_1 = -1 + 3i$

$z_2 = 1 + i$

Calcular la suma.

Solución

$$z_1 + z_2 = -1 + 1 + (3 + 1)i = 0 + 4i = 4i$$

Otro ejemplo:

$z_1 = 3 + 2i$

$z_2 = -2 + \frac{3}{8} i$

Solución

$$z_1 + z_2 = 3 + (-2) + 2 + \frac{3}{8} i = 1 + \frac{19}{8} i$$

Resta de números complejos en forma binómica —

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ definimos su diferencia de la siguiente manera:

Dos amigas viven tan cerca, que una de ellas (amiga A) le dice a la otra (amiga B): vivo tan cerca de tí que si yo quiero te puedo arrojar una piedra o lo que quiera, y sin embargo, tú, no me puedes apedrear ni me puedes arrojar nada.

¿Cómo se explica ésto?

NOTA: a la amiga B no le falta ningún miembro, o sea, tiene brazos en perfecto estado igual que la amiga A.

La solución en la pág. **960**

LOS NOMBRES DE LOS PAPAS

El nombre pontificio de Pablo ocupa el décimo lugar en la lista de los 81 de los escogidos a través de la Historia de la Iglesia por un mayor número de Papas al ser elevados a la suprema magistratura de la Iglesia de Cristo.

1.° Juan: 22 veces (ya que Juan XX no ha existido como Pontífice).
2.° Gregorio: 16 veces.
3.° Benedicto: 15 veces.
4.° Clemente: 14 veces.
5.° Inocencio.
León: 13 veces
6.° Pío: 12 veces.
7.° Esteban,
Bonifacio: 9 veces.
8.° Alejandro.
9.° Adriano: 6 veces.
10.° Pablo,
Sixto,
Nicolás,
Martín,
Celestino: 5 veces.
11.° Eugenio.
Hononio.
Anastasio,
Sergio,
Félix: 4 veces.
12.° Julio,
Calixto,
Lucio,
Victor: 3 veces.
13.° Gelasio,
Pascual,
Dámaso,
Silvestre,
Agapito,
Mariano,
Teodoro,
Pelagio: 2 veces.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + y_1 i) + (-x_2 - y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

se verifica que: $\mathrm{Re}(z_1 - z_2) = \mathrm{Re}[z_1 + (-z_2)] = \mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)$

En la parte imaginaria:

$$\mathrm{Im}(z_1 - z_2) = \mathrm{Im}[z_1 + (-z_2)] = \mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)$$

Ejemplo:

Calcular la resta de los números complejos:

$z_1 = 4 - 5i$

$z_2 = -3 + 2i$

Solución

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (4 - 5i) + (3 - 2i) = (4 + 3) + (-5 - 2)i = 7 - 7i$$

Ejemplo:

Dados los números complejos: $z_1 = -3i$

$z_2 = 2 + 2i$

$z_3 = -1 + i$

Solución: $z_1 + z_2 - z_3 = z_1 + z_2 + (-z_3) =$

Primero efectuamos la suma $z_1 + z_2$:

$$z_1 + z_2 = 2 + (-3 + 2)i = 2 - i$$

llevando este resultado a la expresión anterior obtenemos

$$z_1 + z_2 - z_3 = (2 - i) - (-1 + i) = (2 + 1) + (-1 - 1)i = (3 + -2i)$$

Producto de números complejos en forma binómica

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ definimos el producto de ambos del siguiente modo:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

Ejemplo: Dados los números complejos

$z_1 = 4 - i$

$z_2 = -2 + 3i$

Calcular directamente el producto de ambos.

Solución

Para hacer el producto de dos números complejos en forma binómica lo que hacemos es multiplicar como si fuesen binómios de primer grado, recordando que $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - i) \cdot (-2 + 3i) = 4 \cdot (-2) + 4 \cdot 3i + \\ + 2 \cdot i - 3i^2 = -8 + 12i + 2i + 3 = 5 + 14i$$

Otro ejemplo:

Dados dos números complejos:

$$z_1 = 1 + 2i$$
$$z_2 = -3i$$

Calcular su producto.

Solución

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (-3i) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + \\ + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0)\ i = +6 - 3i$$

En la multiplicación de los números complejos se verifica la siguiente propiedad:

Existe un número complejo $1 + 0i$ que llamaremos elemento neutro tal que el producto de cualquier número complejo $x + yi$ por el elemento neutro nos dá otra vez el $x + yi$.

$$(x + yi)(1 + 0i) = (x \cdot 1 - 0 \cdot y) + (x \cdot 0 + y \cdot 1)i = \\ = x + yi$$

Otra propiedad importante dentro del producto de números complejos es la siguiente:

Dado $z = x + yi$ y el nº real "r" se verifica que

$$Re(r \cdot z) = r \cdot Re(z)$$
$$Im(r \cdot z) = r \cdot Im(z)$$

Ejemplo:

Dados el número complejo $z_1 = 3 - i$ y el número real $r = -1$, demostrar que se cumple la relación anterior.

Solución

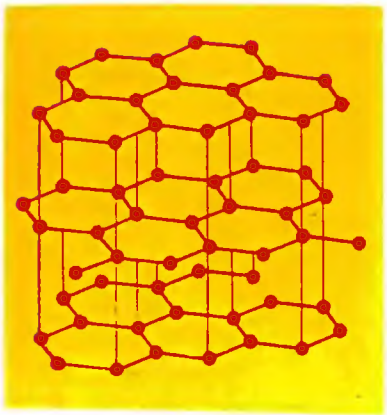
$$(3 - i) \cdot (-1) = -3 + i$$
$$Re(z_1 \cdot r) = (+3)(-1) = -3$$
$$Im(z_1 \cdot r) = (-1) \cdot (-1) = +1$$

Duración de los pontificados:

Dejando aparte a San Pedro, cuya fecha inicial es incierta, ya que algunos lo ponen a partir del 42 y otros a partir del año 30, los más largos Pontificados son:

Pío IX —32 años— (1846-1878)
León XIII — 25 años— (1878-1903)
Pío VI —24 años— (1775-1799)
Adriano I —23 años— (772-795)
Pío VII 22 años— (1800-1822)
San Silvestre I —21 años— (314-335)
San Leon I (Mango) — 21 años— (440-461)
San León III —21 años— (795-816)
Clemente XI —21 años— (1700-1721)
Pascual II —19 años— (1099-1118)
Pío XII —19 años— (1939-1958)

Con 18 años hay cinco Pontifices; dos con 17; tres con 16; cuatro con 15; dos con 14, y cinco con 13. Con 10 años de Pontificado existen 35 Papas.



Todas las cosas que nos rodean en nuestra vida cotidiana están compuestas de materia. Pero todas no están hechas de la misma materia, sino que cada una está compuesta por distintos materiales. Si vamos descomponiendo un objeto en partes y cada una de éstas la volvemos a descomponer, así sucesivamente, vamos obteniendo partículas cada vez más pequeñas, sin embargo, por muchas particiones que hagamos siempre encontraremos una parte que la podemos dividir, hasta llegar a algo que sea indivisible.

El átomo es la parte más pequeña e indivisible de lo que forma la materia. Los átomos son partículas invisibles incluso con microscopio. A pesar de no poder visualizarlos, los científicos, a través de huellas dejadas en placas fotográficas, han conseguido reproducir modelos atómicos y averiguar que los átomos constan de un núcleo central, alrededor del cual giran los neutrones. La unión de varios átomos dan lugar a las moléculas. Cuando un cuerpo está formado por átomos de un mismo tipo, —existen 104 tipos de átomos distintos, de los cuales están compuestas todas las materias del universo, además los científicos son capaces de construir otros átomos en sus laboratorios— se llama "elemento". En el caso de estar formado por la unión de átomos de distinto tipo se llama compuesto. La energía nuclear no es otra cosa que el bombardeo del núcleo de los átomos con partículas capaces de traspasar la capa de electrones que lo rodean, produciéndose así un gran desprendimiento de energía.

Conjugado de un número complejo.—

Dado un número complejo $z = x + yi$, definimos el conjugado de z, y lo representamos por "$\overline{z}$", como el número complejo que tiene la misma parte real que "z" y la parte imaginaria opuesta a la parte imaginaria de "z".

$$\overline{z} = x - yi$$

Ejemplo:

Calcular los conjugados de los siguientes números complejos

$z_1 = 3 - 2i$

$z_2 = -3i$

$z_3 = 4$

Solución

$z_1 = 3 - 2i \rightarrow \overline{z_1} = 3 + 2i$

$z_2 = -3i \rightarrow \overline{z_2} = +3i$

$z_3 = 4 \rightarrow \overline{z_3} = 4$

Propiedades del conjugado de un número complejo.—

1.—El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados de los sumandos.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Ejemplo:

Dados dos números complejos $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 5 - i$. Comprobar la propiedad anterior.

Solución

Calculamos primero la suma de z_1 y z_2

$z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (5 - i) = (1 + 5) + (3 - 1)i =$

$= 6 + 2i$

Hallamos su conjugado

$$\overline{z_1 + z_2} = 6 - 2i$$

Por último, hacemos el conjugado de z_1 y z_2 y su suma.

$\overline{z_1} = 1 - 3i$

$\overline{z_2} = 5 + 1 \cdot i$

luego

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (1 - 3i) + (5 + i) = 1 + 5 - 3i + i =$

$= (1 + 5) + (-3 + 1)i = 6 - 2i$

Ambas expresiones son iguales, luego queda comprobada la propiedad.

2— El conjugado de un producto de números complejos es igual al producto de los conjugados.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Ejemplo

Comprobar la propiedad anterior para los números complejos $z_1 = -1 + 2i$ y $z_2 = +3 + i$

Solución

Efectuamos primero el producto $z_1 \cdot z_2$.

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 + 2i)(3 + i) = (-3 - 2) + (-1 + 6)i = \\ = -5 + 5i$$

El conjugado sería igual

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = -5 - 5i$$

Hallamos el producto de los conjugados $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (-1 - 2i) \cdot (3 - i) = (-3 - 2) + (1 - 6)i = \\ = -5 - 5i$$

Como sin iguales, se verifica la propiedad anterior.

3— El producto de un número complejo por su conjugado es igual a la suma de los cuadrados de la parte real y de la parte imaginaria.

$$z \cdot \overline{z} = \left[\mathrm{Re}(z)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(z)\right]^2$$

Ejemplo

Compruebe la propiedad anterior para el número complejo $z = 3 + 2i$.

Solución

$$z \cdot \overline{z} = (3 + 2i)(3 - 2i) = (9 + 4) + (6 - 6)i$$

$$= 9 + 4 = 3^2 + 2^2$$

La natación para el hombre es un verdadero arte, pues ha tenido que inventar diferentes movimientos para poder desenvolverse en el agua con agilidad.

Es un arte muy antiguo. Los romanos para llamar ignorante a alguien decían de él "no sabe ni siquiera nadar". Para ellos la natación era una táctica militar imprescindible para pooder cruzar los ríos.

Durante la Edad Media esta actividad decayó debido a la creencia común de que no era bueno ir desnudo.

Lutero por esta razón prohibió la natación, sin embargo fueron los propios alemanes los que en 1.700 crearon las "casas de baños" e incluyeron esta disciplina en los programas escolares.

La natación como deporte nació en Inglaterra en 1862 y después se difundió por todo el mundo. Hacia 1870 los ingleses introdujeron el estilo marinero a braza. En 1902 nace el estilo nave que es el estilo de máximo rendimiento con el mínimo esfuerzo.

En 1933 nace el estilo mariposa.

Existe además otra modalidad creada en 1843 que se conoce como "saltos" y que son zambullidas desde un trampolín.

Solución al problema de las amigas.
de la pág. **955**

Siempre se busca la posible solución por métodos difíciles y este también se resuelve por métodos sencillos.

Vamos a suponer que en un mismo edificio la amiga B, vive en el *primer piso* y la amiga A vive en el *piso quince*. La amiga A, no tiene que realizar ningún esfuerzo para *dejar ceer* un objeto sin embargo la amiga B, sí tiene que realizar un esfuerzo enorme para desde el primer piso, elevar un objeto hasta el piso número quince.

4.— El conjugado del conjugado de un número complejo z es él mismo.

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Ejemplo

Verificar la propiedad anterior para $z = 5 - i$

Solución

El conjugado de z sería:

$$\overline{z} = 5 + i$$

y a su vez el conjugado de $\overline{z}$ sería:

$$\overline{\overline{z}} = 5 - i$$

con lo que podemos afirmar que se verifica la propiedad anterior.

División de números complejos.—

Para efectuar la división de dos números complejos z, y z_2 se multiplica dividendo y divisor por el conjugado del divisor.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Ejemplo

Calcular la división $\dfrac{3 + 2i}{1 - i}$

Solución

Multiplicamos el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor $(1 + i)$

$$\frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} + \frac{(3 - 2) + (2 + 3)i}{1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,i$$